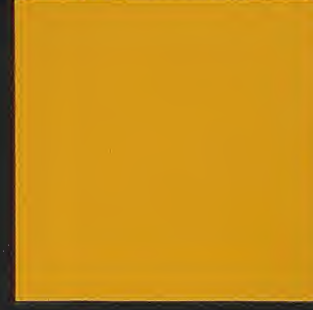
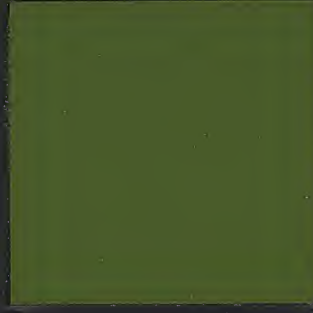


colorchecker CLASSIC



+ x-rite

+
mm

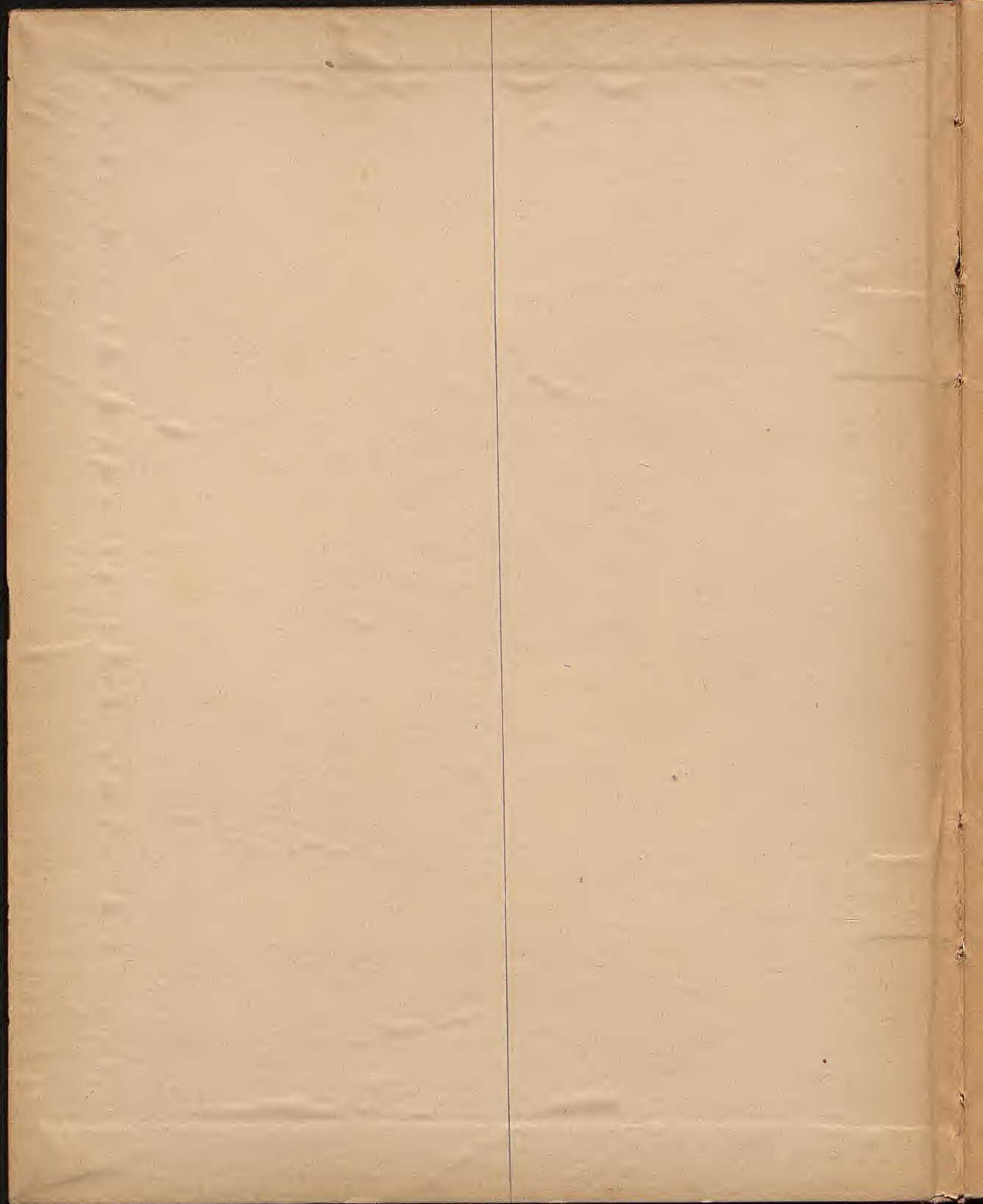
P.
3.

Calcul intégral

*Cours de M. Picard
à la Faculté des sciences
1891-1892.*

3^e cahier Louis Conturat

Papeterie Générale des Écoles, 80, Boul. St-Germain



Cours de Calcul intégral
professé par M. Picard
à la Faculté des sciences
1891-1892.

III.



Table.

Théorie des équations différentielles (suite.)	
Courbes intégrales de l'équation du 1 ^{er} ordre	page 1.
Solutions singulières de l'équation du 1 ^{er} ordre	7.
Théorie du facteur intégrant. Groupes	18.
Equation du 2 ^e ordre	34.
Equations linéaires aux dérivées partielles:	
Système complet jacobien	40.
Equation linéaire homogène	56.
Méthode de Laplace pour l'équation linéaire à coefficients linéaires	64.
Equation linéaire hypergéométrique (groupe d'une équation linéaire)	77.
Calcul des variations	91.
Equation différentielle du 2 ^e ordre	95.
Etude de la variation seconde	102.
Leçons sur les équations différentielles, par C. Bourlet	117.

Théorie des équations différentielles.

Considérons toujours l'équation différentielle du 1^{er} ordre:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + \dots}{ax + by + \dots}$$

Nous allons l'étudier à un point de vue tout différent, et chercher, d'après M. Poincaré (Journal de Liouville, 188) quelles courbes définissent cette équation au voisinage de l'origine. Nous supposons les coefficients réels, et les variables x, y aussi; les systèmes de valeurs (x, y) qui vérifient cette équation constituent des courbes du plan Oxy ; nous allons chercher celles qui passent par l'origine, c'est-à-dire qui admettent la solution: $x=0, y=0$. En d'autres termes, chaque intégrale y , étant une fonction de x , est représentée par une certaine courbe du plan des xy ; nous voulons trouver celles de ces intégrales qui s'annulent avec x .

Ramenons d'abord l'équation proposée à la forme canonique par le changement de variables: $X = \alpha x + \beta y$ $Y = \gamma x + \delta y$
(voir le cahier, page 148.) On doit avoir: $\frac{dY}{dX} = \frac{\lambda_2 Y}{\lambda_1 X}$

d'où les proportions:

$$\alpha(ax + by) + \beta(a_1x + b_1y) = \lambda_1(\alpha x + \beta y)$$

$$\gamma(ax + by) + \delta(a_1x + b_1y) = \lambda_2(\gamma x + \delta y)$$

λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & a_1 \\ \beta & b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Comme nous ne supposons aucune relation entre les coefficients, cette

équation aura les racines distinctes: on aura: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \neq 1$.

Mais il faut distinguer le cas où elles sont réelles et le cas où elles sont imaginaires. L'équation étant: $\lambda^2 - (a+b_1)\lambda + ab_1 - a_1b = 0$

Son discriminant est: $(a+b_1)^2 - 4(ab_1 - a_1b)$

$$- 1^\circ \quad (a+b_1)^2 - 4(ab_1 - a_1b) > 0$$

Les racines λ_1, λ_2 sont réelles, et les ^{coefficients} ~~rapports~~ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ qu'on tire des équations: $\alpha(a-\lambda) + \beta a_1 = 0$ $\alpha b + \beta(b_1 - \lambda) = 0$ seront aussi réels; on aura donc par une transformation réelle la nouvelle équation:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\lambda_2 Y + \dots}{\lambda_1 X + \dots}$$

Il y a 2 cas très différents à distinguer suivant que le rapport (réel) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est positif ou négatif.

Supposons: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$; on sait que l'intégrale générale a la forme (Zecahiv, page 144): $u_2^{\lambda_1}(X, Y) = C u_1^{\lambda_2}(X, Y)$

On peut toujours supposer λ_1, λ_2 positifs. L'équation précédente représente une courbe qui passe par l'origine; en faisant varier C on a une famille de courbes qui représentent toutes les intégrales qui s'accumulent avec X ; ces courbes se répartissent en 2 faisceaux tangents à 2 droites en 0. L'origine s'appellera alors un nœud.

Supposons: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$

On posera: $Y = tX$,

et on aura: $t + X \frac{dt}{dX} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t + \dots$

$$X \frac{dt}{dX} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) t + \dots$$

Cette équation n'admet qu'une seule intégrale $\frac{t}{X}$ s'accumulant avec X ; cette intégrale est représentée par une courbe qui passe par l'origine (cf. Zecahiv, page 147).

et est tangente à l'axe des x , puisque son coefficient angulaire t est ^{inf.}
 Posons ensuite: $X = OY$. La racine $t = \infty$ devient,

$O = 0$; on a une nouvelle intégrale O s'annulant avec
 et représentée par une courbe tangente en O à l'axe des y ,
 puisque son coefficient angulaire est infini. Il y a donc 2
 courbes intégrales qui passent par O et s'y coupent à angle droit;
 l'origine s'appelle alors un col.

- 2° $(a+b_1)^2 - 4(ab_1 - a_1b) < 0$

Les racines λ, λ_2 étant imaginaires, la courbe n'a aucune
 tangente déterminée au point: $x=0, y=0$.

En effet, on a une équation du 2e degré en t :

$$\frac{a_1 + b_1 t}{a + b t} - t = 0 \quad \text{ou;} \quad b t^2 + (a - b_1) t - a_1 = 0$$

qui donne les coefficients angulaires des tangentes en O . Or elle
 a même discriminant que l'équation en λ :

$$(a+b_1)^2 - 4(ab_1 - a_1b) = (a-b_1)^2 + 4a_1b$$

donc les valeurs de t sont imaginaires comme celles de λ .

L'origine est donc un point asymptotique pour les courbes intégrales;
 il y en a d'ailleurs une infinité. L'origine s'appelle un foyer.

- Les 2 racines λ, λ_2 étant imaginaires conjuguées, les coefficients
 α et γ , β et δ sont aussi des imaginaires conjuguées. Donc
 X, Y aussi sont imaginaires conjugués (x, y étant réelles).
 Soit on ramène l'équation à la forme canonique, les fonctions

u_1, u_2 elles-mêmes seront imaginaires conjuguées, de la forme:

$$f(X,Y) + i\varphi(X,Y)$$

$$f(X,Y) - i\varphi(X,Y)$$

f et φ étant des fonctions réelles holomorphes s'annulant pour $X=0, Y=0$. D'autre part, posons:

$$\lambda_1 = p + qi$$

$$\lambda_2 = p - qi$$

p et q constantes réelles.

L'intégrale générale sera:

$$\frac{(f+i\varphi)^{p+qi}}{(f-i\varphi)^{p-qi}} = C_1$$

C'est l'équation des courbes intégrales; on en obtient une infinité en faisant varier C_1 . Nous allons déterminer leur forme générale. Prenons les logarithmes de cette équation:

$$(p+qi) \log(f+i\varphi) - (p-qi) \log(f-i\varphi) = Ci$$

C'est une constante réelle, car la différence de 2 imaginaires conjugués est purement imaginaire. Faisons la transformation:

$$f(X,Y) = \xi, \quad \varphi(X,Y) = \eta$$

et supposons que le déterminant fonctionnel n'est pas nul; la courbe en (X,Y) se transformera en une courbe en (ξ, η) . Cette transformée a une forme très simple:

$$(p+qi) \log(\xi + i\eta) - (p-qi) \log(\xi - i\eta) = Ci$$

En coordonnées polaires, posons: $\xi = \rho \cos \theta$ $\eta = \rho \sin \theta$

$$(p+qi)(\log \rho + i\theta) - (p-qi)(\log \rho - i\theta) = Ci$$

d'où l'on tire: $2q \log \rho + 2p\theta = C$

équation d'une courbe réelle, qui est une spirale logarithmique:

$$\log \rho = -\frac{p}{q}\theta + C$$

$$\rho = Ce^{-\frac{p}{q}\theta}$$

La transformée étant une spirale logarithmique, la courbe primitive est aussi une spirale, plus compliquée. On a donc une infinité de courbes intégrales de forme spirales, qui ont le point 0 pour point asymptotique et décrivent une infinité de spires autour de l'origine.

Exemple (l'origine foyer):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

Equation en λ :

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 + 1 = 0 \quad \lambda = 1 \pm i.$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{i}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{i}$$

$$X = x - iy$$

$$Y = x + iy$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dx + i dy}{dx - i dy} = \frac{x - y + i(x + y)}{x - y - i(x + y)} = \frac{x + iy + i(x + iy)}{x - iy - i(x - iy)} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{Y}{X}$$

En faisant, dans la transformation précédente, $p=1$, $q=-1$, on trouve pour la transformée:

$$\rho = Ce^{\theta}.$$

Exemple (l'origine col):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$xy = C$$

est l'intégrale générale; elle représente 2 hyperboles équilatères ayant pour asymptotes les axes. Il y a 2 courbes intégrales qui passent par 0; on les obtient en faisant $C=0$: $x=0$, $y=0$.
Ce sont les 2 axes eux-mêmes.

Il peut arriver, dans certains cas particuliers, qu'un point du plan ne soit ni nœud, ni col, ni foyer. Par exemple, si λ_1 et λ_2 sont imaginaires, mais que leur rapport soit réel, le point ne sera pas en général un foyer. On a nécessairement dans ce cas:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1, \quad \text{puisque } \lambda_1, \lambda_2 \text{ sont imaginaires conjugués.}$$

On ne peut plus poser l'intégrale générale: $u_2^{\lambda_1} = C u_1^{\lambda_2}$

car $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est négatif (cf. le cahier, page 144) — Exemple:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Pour ramener à la forme canonique, il faut changer des variables; l'équation en λ est: $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = +i \quad \lambda_2 = -i$$

On trouve bien: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{Y}{X}$$

Intégrons directement l'équation proposée:

$$x^2 + y^2 = C$$

Les courbes intégrales sont donc des cercles, et plus généralement des courbes fermées s'enveloppant les unes les autres et ont pour l'origine sans y passer (sauf pour $C=0$, la courbe se réduit alors à O).

L'origine s'appelle alors centre.

— Ainsi l'équation: $\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$ (X, Y polynômes en x, y)

définit un réseau de courbes intégrales (y en fonction de x). Pour savoir comment elles se comportent dans toute l'étendue du plan, il faut d'abord connaître leurs singularités. Elles ont d'abord pour points singuliers ceux qui annulent à la fois X et Y ; on sent en général si ce sont des nœuds, des cols, des foyers ou des centres, et par suite on connaît l'allure des courbes au voisinage de ces points. Mais ces courbes admettent d'autres singularités dont on ne peut se rendre compte au moyen de l'équation différentielle. Ce qui complique surtout cette étude, c'est que les courbes intégrales ont, en général, des courbes asymptotiques (cycles limites) dont elles s'approchent indéfiniment par une infinité de spirales, et qu'on ne peut pas toujours déterminer.

7
cela dépend des cas particuliers qu'on étudie.

On peut étudier a priori les cycles limites en les créant arbitrairement; un foyer est un cercle limite infiniment petit; si l'on fait une transformation bi-rationnelle, pour laquelle le foyer soit un point d'indétermination, il sera transformé en une certaine courbe fermée d'indétermination; ce sera un cycle limite.

Solutions singulières.

Soit l'équation différentielle:

$$f(x, y, y') = 0$$

et supposons qu'il y ait une relation entre x, y , représentée géométriquement par une courbe plane. A chaque système de valeurs de x, y vérifiant cette relation correspond ^{ou plusieurs} une ou plusieurs valeurs de y' définies par l'équation différentielle: ce sera le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point considéré (x_0, y_0) . Supposons que y' soit une racine simple; elle sera fonction holomorphe de x, y dans le voisinage du point (x_0, y_0) ; on aura donc:

$$y' = F(x, y)$$

et il suffira d'appliquer le théorème fondamental à cette équation différentielle explicite pour obtenir l'intégrale y qui passe par le point x_0, y_0 , c'est-à-dire pour avoir la courbe intégrale au voisinage de ce point.

Il se peut que y' soit racine multiple en certains points; il se peut même qu'elle soit racine multiple pour tous les points d'une courbe.

On ne pourra plus tirer y' de l'équation en fonction holomorphe de x, y , ni par conséquent appliquer le théorème fondamental pour connaître l'intégrale. On appelle solution singulière de l'équation différentielle une intégrale telle que y' ne soit fonction holomorphe

de x, y en aucun point de la courbe qui représente cette intégrale.
 Il est facile d'obtenir les solutions singulières; puisque par définition on doit avoir: $\frac{dy}{dx} = 0$ (y' racine multiple).

en éliminant y' entre cette équation et l'équation différentielle, on trouve une équation finie: $Q(x, y) = 0$

d'où l'on tirera la ou les solutions singulières y en fonction de x .
 Donc, si les solutions singulières existent, elles s'obtiennent algèbreiquement.

Il faut bien remarquer que la relation: $Q(x, y) = 0$
 ne contient pas nécessairement une solution de l'équation différentielle: on sait seulement que s'il existe une solution singulière, elle vérifie cette équation. Comme il n'y a pas de raison pour qu'une équation

$Q(x, y) = 0$ définisse une fonction implicite y de x qui vérifie l'équation différentielle proposée, on peut dire qu'en général il n'y a pas de solution singulière. Soit par exemple l'équation explicite en y' :

$$y'^2 = P(x, y)$$

L'équation dérivée est: $y' = 0$
 est l'équation résultante: $P(x, y) = 0$

La fonction P étant absolument quelconque, il n'y a pas de raison pour que les fonctions y qui vérifient cette équation soient des solutions de l'équation différentielle donnée. Supposons par exemple qu'on ait:

$$P(x, y) = Ax + By + C$$

A, B, C fonctions de x .

La solution de l'équation:

$$Ax + By + C = 0$$

$$y' = -\frac{A}{B}$$

ne vérifie pas l'équation:

$$y'^2 = Ax + By + C$$

car celle-ci devient:

$$\frac{A^2}{B^2} = 0$$

ce qui est absurde.

Dans tous les cas, on a toujours une courbe représentant l'équation:

$$Q(x, y) = 0$$

Considérons un de ses points (α, β) , et cherchons quelles sont les intégrales qui passent par ce point. D'après la définition même de la courbe, on a en général une racine double (au moins) pour y' quand on substitue α, β à x, y dans l'équation différentielle.

On a donc au voisinage du point (α, β) 2 valeurs de y' distinctes, puisque la courbe: $Q(x, y) = 0$ est le lieu des points où y' est une racine double. Ces 2 valeurs sont racines d'une équation du 2^e degré dont les coefficients sont fonctions holomorphes de x, y au voisinage du point (α, β) ; on peut donc substituer à l'équation différentielle la suivante:

$$y' = A(x, y) \pm \sqrt{B(x, y)}$$

La courbe $Q(x, y) = 0$ est remplacée, au voisinage du point (α, β) par la courbe dont l'équation est:

$$B(x, y) = 0$$

et qui passe aussi par le p. (α, β) de sorte qu'on a: $B(\alpha, \beta) = 0$.

La valeur correspondante de y' est la racine double: $A(\alpha, \beta)$

Or cette valeur doit être différente de celle du coefficient angulaire de la tangente à la courbe $B=0$ (ou $Q=0$) car autrement la fonction implicite y de x définie par l'équation: $B(x, y) = 0$ serait une solution singulière, et nous supposons qu'il n'y a pas de solution singulière.

Prenons pour origine le point que nous avons appelé (α, β) ; on aura:

$$A(x, y) = A + \alpha x + \beta y + \dots$$

$$B(x, y) = ax + by + \dots$$

$$\text{car } B(0, 0) = 0.$$

Supposons: $A \geq -\frac{a}{b}$

$$\text{ou: } a + bA \geq 0.$$

et cherchons, dans cette hypothèse, quelles sont les courbes intégrales qui passent par l'origine ($x=0, y=0$).

Posons: $x = x'$, $y = \lambda x'^2$; l'équation en y' devient, étât:

$$\frac{dy}{dx} = A(x, y) + \sqrt{B(x, y)} \quad \text{elle devient:}$$

$$\frac{x'^2 d\lambda + 2\lambda x' dx'}{2x' dx'} = \frac{x' d\lambda}{2 dx'} + \lambda = A + x'^2(\alpha + \beta\lambda) + \dots + x' \sqrt{a + b\lambda + x'^2(\dots)}$$

ou: $\frac{x' d\lambda}{dx'} = -2(\lambda - A) + 2x'^2(\alpha + \beta\lambda) + \dots + x' \sqrt{a + b\lambda + x'^2(\dots)}$

Le 2^e membre s'annule pour $x'=0, \lambda=A$; et il ne peut pas y avoir d'autre valeur de λ qui annule ce 2^e membre pour $x'=0$. On a donc, en vertu d'un théorème établi précédemment (2^e cahier, pag. 133) une seule intégrale, qui est holomorphe, à la condition que le 2^e membre soit holomorphe; or la quantité sous le radical ne s'annule pas pour $x'=0, \lambda=A$, car on a supposé:

$$a + bA \neq 0$$

(ce qui revient à supposer qu'il n'y a pas de solutions singulières)

On a donc l'intégrale λ de la forme suivante:

$$\lambda = A + px' + qx'^2 + \dots$$

se réduisant à A pour $x'=0$. On a par suite l'intégrale:

$$y = \lambda x = x(A + px' + qx'^2 + \dots)$$

fonction ayant 2 déterminations distinctes sauf à l'origine ($x=0, y=0$) puisqu'elle est développée suivant les puissances de \sqrt{x} .

Celle est la forme de la courbe intégrale qui passe par le point (α, β) pris provisoirement pour origine; elle a un rebroussement en ce point. (2 branches ayant un point commun et une tangente commune). Ainsi la courbe: $Q(x, y) = 0$ est le lieu des points de rebroussement.

des courbes intégrales (démonstration de M. Darboux, Bulletin..... 187.)

- Étudions maintenant le cas où il y a des solutions singulières.

Supposons que la solution de l'équation : $Q(x, y) = 0$
vérifie l'équation différentielle, c'à d. que la fonction y de x définie
par cette équation dans le voisinage du point (α, β) de cette courbe
satisfait l'équation équivalente : $\frac{dy}{dx} = A(x, y)$
qui exprime que y' est une racine double sur la courbe $Q = 0$.

Dans ce cas, on a : $a + bA = 0$

car le coefficient angulaire pour chaque point de la courbe pris pour
origine est : $\frac{dy}{dx} = A$

et d'autre part la courbe $Q = 0$ est représentée dans le voisinage
du p. $(x=0, y=0)$ par l'équation : $B(x, y) = 0$
et son coefficient angulaire est par suite : $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}$.

- Soit y_1 la solution singulière; on a identiquement :

$$B(x, y_1) = 0$$

$$\frac{dy_1}{dx} = A(x, y_1) \quad (y' \text{ racine double})$$

Posons : $y = y_1 + z$ x est la nouvelle fonction inconnue;
l'équation différentielle devient :

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = A(x, y_1 + z) + \sqrt{B(x, y_1 + z)} \quad \text{ou ;}$$

$$\frac{dz}{dx} = z \varphi_1(x) + z^2 \varphi_2(x) + \dots + \sqrt{z \psi_1(x) + z^2 \psi_2(x) + \dots}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \psi_1, \psi_2, \dots$ étant des fonctions holomorphes en x .

En général $\varphi_1(x)$ ne sera pas identiquement nul; l'origine étant
un point arbitraire de la courbe, supposons : $\varphi_1(0) \neq 0$.

Cherchons quelles sont les intégrales de cette équation différentielle en x qui s'annulent pour $x=0$, c'est-à-d. qui passent par le point choisi sur la courbe: $Q=0$.

Il y a d'abord la solution évidente: z identiquement nul, qui donne l'intégrale y_1 connue. Pour savoir s'il y en a une autre, posons: $z = z'^3$; l'équation devient (en divisant par z'):

$$2 \frac{dz'}{dx} = z' \varphi_1(x) + z'^3 + \dots + \sqrt{\varphi_1(x) + z'^2 \varphi_2(x) + \dots}$$

Le membre est holomorphe au voisinage de $x=0$, $z'=0$, car pour $x=0$, la quantité soumise au radical ne s'annule pas, puisque par hypothèse: $\varphi_1(0) \neq 0$.

On a donc une intégrale z' ; ce sont 2 solutions égales et de signes contraires, car la quantité soumise au radical étant paire et la partie rationnelle impaire, changer le signe du radical équivaut à changer le signe de z' . D'ailleurs z' s'annulant avec x n'aura pas de terme indépendant de x . On aura donc l'intégrale cherchée:

$y = y_1 + z'^2$, le développement de z'^2 commençant par un terme en x^2 .

On obtient ainsi une autre solution que la solution singulière y_1 , mais elle est liée à elle-ci par une relation remarquable: les 2 courbes intégrales ont même tangente au point commun ($x=0, y=0$) puisque leurs ordonnées (y_1, y_2) ne diffèrent que par un terme du 2^e degré en x . — Ainsi la courbe: $Q=0$ qui représente la solution singulière est tangente en tous ses points à une solution ordinaire; c'est-à-d. donc l'enveloppe des courbes intégrales de l'équation différentielle.

En général, c'est quand $\varphi_1(x)$ n'est pas identiquement nul, la solution singulière définie par l'équation: $Q(x, y) = 0$ ne rentre pas dans l'intégrale générale.

Mais si: $\varphi_1(x) = 0$ identiquement, il n'y a pas d'autre intégrale passant par le point (x, β) que la solution singulière $z = 0$: en effet, l'équation différentielle prend la forme:

$$\frac{dz}{dx} = z \varphi_2(x) + z^3 \varphi_3(x) + \dots + z \sqrt{\varphi_2(x) + z^2(\dots)}$$

Le 2^e membre est holomorphe au voisinage de $x=0$, $z=0$, si $\varphi_2(x)$ n'est pas identiquement nul; on a donc l'équation:

$$\frac{dz}{dx} = z F(z, x) \quad (F \text{ holomorphe})$$

Or on sait (v. Le catin, pp. 103, 104) que ce type d'équation n'admet pas d'autre intégrale que: $z = 0$ identiquement.

Donc, dans ce cas, la solution singulière est la seule solution. La solution générale se confond avec la solution singulière, donc celle-ci rentre dans l'intégrale générale; elle correspond à une certaine valeur de la constante arbitraire.

Exemples. — Soit l'équation: $\frac{dy}{dx} = y + y\sqrt{1+y}$ qu'on pourrait intégrer par quadrature. Prenons les valeurs de y pour lesquelles les 2 racines sont égales: $y = 0$, $y = -1$. La solution singulière: $y = 0$, rentre dans l'intégrale générale; l'autre solution: $y = -1$ n'est pas une solution de l'équation différentielle. Donc cette ligne (droite parallèle à Ox) sera l'un des points de rebroussement des courbes intégrales.

— Soit l'équation: $y - 2x \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$
 du 2^e degré; a ses racines égales pour: $x^2 + y = 0$ $[Q=0]$
 Cette valeur de y n'est pas une solution de l'équation; donc la courbe
 $Q=0$ est la lieu des points de rebroussement des courbes intégrales.

— Soit l'équation: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$
 Elle a ses racines égales pour: $x^2 - 2y = 0$, $y = \frac{x^2}{2}$ $[Q=0]$
 Cette valeur de y est une solution de l'équation; c'est une solution
 singulière qui ne rentre pas dans l'intégrale générale, car:
 $\frac{dy}{dx} = x + \sqrt{x^2 - 2y}$ Posons: $y_1 = \frac{x^2}{2}$ $y = y_1 + z$
 $\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = x + \sqrt{x^2 - 2y_1 - 2z}$ $\frac{dz}{dx} = \sqrt{-2z}$ $(\psi_1 = -2)$

L'origine de la théorie des solutions singulières a été la considération
 des courbes enveloppes, qui se présente seulement dans nos conclusions.
 On raisonnait ainsi: l'équation: $f(x, y, y') = 0$
 admet une intégrale générale: $F(x, y, C) = 0$
 avec une constante arbitraire. Elle définit géométriquement une
 famille de courbes dépendant d'un paramètre arbitraire. De telles
 courbes ont en général une enveloppe, et cette enveloppe doit satisfaire
 l'équation différentielle: en effet, en chacun de ses points il est tangent
 à une enveloppée, donc x, y, y' sont les mêmes sur l'enveloppe
 et sur l'enveloppée. L'enveloppe est donc une solution singulière
 de l'équation différentielle.

Cette façon de poser et de traiter la question engendrait certains
 paradoxes: on admettait qu'une famille de courbes ayant en général
 une enveloppe, une équation différentielle avait en général une

solution singulière. Nous avons vu, en concevant autrement le problème, que bien au contraire une équation différentielle n'a pas, en général, de solution singulière.

Et en effet les conclusions ou présomptions fondées sur la géométrie étaient téméraires et excessives: on ne sait rien, ^{a priori}, en général, de la famille de courbes définies par l'intégrale: $F(x, y, C) = 0$ et l'on ne peut affirmer qu'elles aient une véritable enveloppe; aussi avons-nous vu que dans le cas général la courbe $A = 0$ est le lieu de leurs points singuliers.

Si au contraire on définit une famille de courbes par l'équation finie: $F(x, y, C) = 0$ et qu'on forme ensuite l'équation différentielle en éliminant le paramètre C , il est tout naturel que les courbes intégrales de cette équation aient une enveloppe, c'est-à-dire que l'équation elle-même ait une solution singulière. Il y a, selon la remarque faite par Clebsch, qui a donné l'explication définitive de ces paradoxes, deux manières de définir les courbes d'une famille (soit par leur équation différentielle, soit par leur équation entières finie avec un paramètre arbitraire), de même qu'on peut définir une courbe plane, soit en coordonnées ponctuelles, soit en coordonnées tangentielles; il y a d'ailleurs une grande analogie entre ces deux distinctions parallèles. Il semble étrange que les courbes intégrales d'une équation différentielle quelconque n'aient pas d'enveloppe; mais cela n'est pas plus étonnant que devoir des courbes en coordonnées tangentielles avoir des points singuliers.

Considérons le type d'équation différentielle élémentaire :

$$\frac{dy}{dx} = Ay^2 + By + C$$

A, B, C fonctions de x .

On l'a déjà rencontrée (Deleah, pages 112, 130) en se proposant de résoudre le problème général : trouver une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dy}{dx} = R(y, x)$$

R étant une fonction rationnelle

de y , telle que les points singuliers des intégrales de cette équation soient fixes. On sait que pour cela R doit se réduire à un trinôme du 2^e degré :

$$Ay^2 + By + C$$

On obtient ainsi l'équation de Riccati, qui se rencontre très fréquemment dans la pratique.

On peut se rendre compte a priori de la forme sous laquelle la constante figure dans l'intégrale générale de cette équation. On sait qu'il y a un certain nombre de points singuliers fixes dans le plan. On peut donc se rendre de x_0 en x par un certain chemin qui ne passe par aucun point singulier. On se donne en x_0 la valeur initiale y_0 , on trouve en x une valeur déterminée y , qui dépend d'une certaine manière de y_0 — y est une fonction analytique de y_0 , car on a au voisinage de y_0 une intégrale développable en série, et l'on peut prolonger cette fonction de proche en proche par des cercles successifs le long de la courbe (x_0, x) sans jamais être arrêté, quelque soit la longueur. C'est de plus une fonction uniforme pour toute valeur de y_0 , même pour $y_0 = \infty$. C'est donc une fonction rationnelle de y_0 ; y ne peut avoir que des pôles. Mais on peut renverser la proposition : y_0 dépend réciproquement de y , et de la même manière ; donc y_0 est fonction rationnelle de y . Puisque la relation entre

17
 y & y_0 est rationnelle dans les x (fonction directe et inverse)
 elle ne peut être que de la forme:

$$y = \frac{Py_0 + Q}{Ry_0 + S}$$

P, Q, R, S étant fonctions de x .

Elle est la forme sous laquelle la constante y_0 entre dans l'intégrale générale de l'équation de Riccati.

L'intégration de cette équation ne peut en général s'effectuer au moyen des symboles élémentaires. Mais si: $A=0$, on est ramené à une équation linéaire:

$$\frac{dy}{dx} = By + C$$

qu'il est facile d'intégrer.

Posons: $y = uv$

u, v fonctions arbitraires.

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} = Buv + C$$

Choisissons v de manière à faire disparaître le terme en B :

$$\frac{dv}{dx} = Bv \quad \frac{dv}{v} = Bdx \quad \log v = \int Bdx \quad v = e^{\int Bdx}$$

Nous n'ajoutons pas de constante, parce que v est une fonction auxiliaire dont nous pouvons choisir une détermination arbitraire.

L'équation se réduit à:

$$u \frac{du}{dx} = C$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{C}{v}$$

$$u = \int \frac{C}{v} dx = \int C e^{-\int Bdx} dx$$

On ajoutera ici une constante arbitraire, qui figurera linéairement dans y , mais elle n'entra pas au dénominateur, car y ne peut pas devenir infini quand on annule cette constante. Posons $y = \frac{1}{x}$, pour transformer l'infini de y en zéro de x . On aura pour un point ordinaire x de B et de C : $-\frac{dx}{dx} = Bx + Cx^2$
 x étant facteur dans le 2^e membre, cette équation a pour unique

Solution: x identiquement nul, ou $y = \infty$. (Lecabier, page 103)
 On pouvait d'ailleurs prévoir que la constante y_0 ne figurerait pas au dénominateur.

Théorie du facteur intégrant

Mettons l'équation linéaire sous la forme: $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$

X et Y étant des fonctions de x, y .

Supposons que l'intégrale générale soit: $f(x, y) = C$

Différentions: $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$

d'où, à cause de l'éq. linéaire: $X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (1)

Si le 1^{er} membre de l'équation linéaire, mis sous la forme:

$$Y dx - X dy = 0$$

est une différentielle totale exacte: df ,

l'équation (1) signifie que le déterminant fonctionnel de f et f_1 est nul, c'est que f est fonction de f_1 ; l'équation linéaire sera immédiatement intégrée, et son intégrale générale sera:

$$f_1(x, y) = C \text{ te}$$

Si le 1^{er} membre n'est pas différentielle exacte, l'équation (1)

donne:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{Y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{-X} = \mu$$

μ étant une fonction de x, y , et non un facteur constant comme dans le cas précédent. On écrit: $\frac{\partial f}{\partial x} = \mu Y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -\mu X$

d'où: $\mu(Y dx - X dy) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = df$

Ainsi ce facteur μ rend le 1^{er} membre de l'équation linéaire

différentielle totale exacte. La recherche de ce facteur intégrant équivaut à celle de l'intégrale générale, qui s'en déduit directement. D'ailleurs, il peut y avoir une infinité de facteurs intégrants :

soit μ_1 un second, on a : $\mu_1 (Y dx - X dy) = df_1$

d'où : $\frac{df_1}{df} = \frac{\mu_1}{\mu}$ $\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df}{dx}} = \frac{\frac{df_1}{dy}}{\frac{df}{dy}} = \frac{\mu_1}{\mu}$

f_1 est fonction de f , puisque leur déterminant fonctionnel est nul. On a donc, en appelant ϕ cette fonction : $\phi'(f) = \frac{\mu_1}{\mu}$

ou : $\mu_1 = \mu \phi'(f)$

La fonction ϕ étant arbitraire, on voit qu'on peut obtenir un facteur intégrant quelconque en multipliant le 1^{er} trouvé par une fonction quelconque de f . — f étant la fonction doublet^{re} membre est la différentielle totale exacte, l'équation linéaire a pour intégrale générale :

$f(x, y) = C$

Nous allons traiter le cas où X, Y sont des fonctions homogènes du même degré en x et y . Le facteur intégrant est facile à trouver.

Posons : $\frac{y}{x} = t$

L'équation linéaire devient :

Soit n le degré :

$Y(x, tx) dx - X(x, tx) dy = 0$

$x^n Y(1, t) dx - x^n X(1, t) t dx - x^{n+1} X(1, t) dt = 0$

$x^n [Y(1, t) - t X(1, t)] dx = x^{n+1} X(1, t) dt$

Divisons par $x^{n+1} [Y(1, t) - t X(1, t)]$:

$\frac{dx}{x} = \frac{X(1, t)}{Y(1, t) - t X(1, t)} dt$

Les variables sont séparées. On voit, en revenant aux anciennes variables, que le facteur intégrant est :

$$\frac{1}{xY - yX}$$

Nous allons exposer, pour les appliquer aux équations du 1^{er} ordre, les principes de la théorie des groupes de transformations, d'après les recherches de M. Sophus Lie sur les transformations infinitésimales des équations.

Considérons n variables x_1, x_2, \dots, x_n et n équations de transformation :

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r)$$

$$x'_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x'_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r)$$

contenant r paramètres arbitraires a_1, a_2, \dots, a_r . À chaque système de valeurs attribuées à ces paramètres correspond une transformation, de sorte que le système des n équations précédentes définit une infinité de transformations. On dit que toutes ces transformations forment un groupe, si en faisant subir aux n variables successivement 2 transformations quelconques de cet ensemble on obtient une transformation appartenant encore à cet ensemble.

Supposons effectuée la transformation indiquée ci-dessus avec des valeurs déterminées assignées aux paramètres; puis effectuons sur les nouvelles variables x'_1, x'_2, \dots, x'_n une nouvelle transformation avec de nouvelles valeurs des paramètres :

$$x'_1 = f_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, b_1, b_2, \dots, b_r)$$

$$x'_2 = f_2(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, b_1, b_2, \dots, b_r)$$

$$x'_n = f_n(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, b_1, b_2, \dots, b_r)$$

On aura un groupe de transformations, si, en remplaçant dans ces nouvelles équations x'_1, x'_2, \dots, x'_n par leurs expressions en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r$, on trouve des équations de même forme:

$$x''_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_r)$$

$$x''_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_r)$$

$$x''_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_r)$$

où les valeurs c des paramètres dépendent uniquement des valeurs a et b ; c'est à dire une transformation du même type.

Cherchons à quelles conditions on a un groupe dans le cas le plus simple où: $r=1$. Soit a le paramètre unique; pour simplifier, nous ne prendrons que 2 variables x, y , mais les raisonnements suivants s'appliquent à toute transformation à 1 paramètre. — Faisons 2 transformations consécutives:

$$x' = f(x, y, a)$$

$$y' = \varphi(x, y, a)$$

$$x'' = f(x', y', b)$$

$$y'' = \varphi(x', y', b)$$

Pour qu'il y ait un groupe, il faut qu'on ait aussi:

$$x'' = f(x, y, c)$$

$$y'' = \varphi(x, y, c)$$

c étant une fonction $\psi(a, b)$

Supposons que parmi les transformations du type proposé se trouve la substitution identique, c'est-à-d. que pour une certaine valeur a_0 du paramètre on ait identiquement:

$$f(x, y, a_0) = x \quad \varphi(x, y, a_0) = y \quad \text{c'est-à-d.} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Cela posé, si l'on a un groupe, on doit avoir les identités suivantes:

$$f(x', y', b) = f(x, y, c) \quad \varphi(x', y', b) = \varphi(x, y, c)$$

Les 3 valeurs, a, b, c étant liés par la relation: $c = \psi(a, b)$

Supposons que a et b sont les variables indépendantes. Différentions les identités précédentes par rapport à a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a} = 0.$$

$\frac{\partial b}{\partial a}$ est connu; on peut le calculer en différenciant la relation $c = \psi$:

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a}$$

Le déterminant fonctionnel des équations précédentes n'est pas nul, car on suppose f et φ indépendantes; on peut donc les résoudre par rapport à $\frac{\partial x'}{\partial a}$, $\frac{\partial y'}{\partial a}$, et on en tire:

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = \frac{\partial b}{\partial a} F(x', y', b) \quad \frac{\partial y'}{\partial a} = \frac{\partial b}{\partial a} \Phi(x', y', b)$$

Où $\frac{\partial b}{\partial a}$ est fonction de a et b :

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = \lambda(a, b) F(x', y', b) \quad \frac{\partial y'}{\partial a} = \lambda(a, b) \Phi(x', y', b)$$

Ces identités doivent avoir lieu quels que soient a et b , par suite, quels que soient a et b : c ne figurant pas dans ces équations, on peut y considérer a et b comme variables indépendantes.

Donnons à t une valeur constante t_0 ; il reste:

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = \lambda(a) \xi(x'y')$$

$$\frac{\partial y'}{\partial a} = \lambda(a) \eta(x'y')$$

x', y' considérés comme fonctions de a doivent satisfaire à l'équation différentielle de cette forme.

Changons de paramètre, et posons: $\lambda(a) da = dt$

d'où: $t = \int \lambda(a) da$

Les équations deviennent:

$$\frac{dx'}{dt} = \xi(x', y')$$

$$\frac{dy'}{dt} = \eta(x', y') \quad (1)$$

Quelles que soient les valeurs de x et y , les fonctions x', y' doivent vérifier ces équations différentielles; donc les équations finies: $x' = f(x, y, t)$ $y' = \varphi(x, y, t)$ (2)

où x, y sont considérés comme 2 constantes, représentent l'intégrale générale du système (1) (arbitraires).

Il reste à déterminer ces constantes par les conditions imposées aux fonctions x', y' . Or on sait que pour la valeur a_0 du paramètre, on a: $x' = x, y' = y$ par hypothèse.

On s'arrangera donc pour qu'à la valeur a_0 du paramètre corresponde la valeur $t = 0$ du nouveau paramètre, en posant:

$$t = \int_{a_0}^a \lambda(a) da$$

et ensuite pour que:

$$f(x, y, 0) = x$$

$$\varphi(x, y, 0) = y.$$

Ainsi, tout groupe de transformations à un paramètre peut être considéré comme représentant l'intégrale générale d'un système

d'équations différentielles ordinaires du 1^{er} ordre.

Réciproquement, étant donné un système d'équations différentielles, on va démontrer qu'on peut en déduire la formation d'un groupe.

Soient les équations différentielles simultanées :

$$\frac{dx'}{dt} = \xi(x', y') \quad \frac{dy'}{dt} = \eta(x', y')$$

et, pour déterminer leurs intégrales, assignons aux fonctions x', y' les valeurs x, y pour $t=0$.

On en déduit l'équation différentielle du 1^{er} ordre :

$$\frac{dx'}{\xi(x', y')} = \frac{dy'}{\eta(x', y')}$$

dont l'intégrale générale est : $F(x', y') = C$

Or on a d'autre part : $\frac{dx'}{\xi(x', y')} = dt$

Remplaçons dans cette dernière équation y' par sa valeur tirée de l'intégrale générale, en fonction de x' et de C , et intégrons :

$$\phi(x', C) = t + h$$

$$\text{Or : } C = F(x', y')$$

Substituons : $\Phi(x', y') = t + h$

On disposera des 2 constantes C et h de manière que pour $t=0$, $x'=x$, $y'=y$: $C = F(x, y)$ $h = \Phi(x, y)$

On a ainsi les 2 équations finies :

$$F(x', y') = F(x, y)$$

$$\Phi(x', y') - \Phi(x, y) = t$$

Il est aisé de vérifier qu'elles forment bien un groupe. Faisons une 2^e transformation : $F(x'' y'') = F(x' y')$ $\Phi(x'' y'') - \Phi(x' y') = t'$

On a bien: $F(x'y'') = F(xy)$ $\Phi(x'y'') - \Phi(xy) = t + t'$
 relations de même forme, où $t'' = t + t'$.

Si l'on écrit: $x'' = f(x', y', t')$ $y'' = \varphi(x', y', t')$
 on aura: $x'' = f(x, y, t + t')$ $y'' = \varphi(x, y, t + t')$

Ainsi la formation des groupes à 1 paramètre dépend d'une équation différentielle du 1^{er} ordre, c.à.d. de la connaissance des 2 fonctions ξ et η qui sont les dérivées des fonctions x' et y' par rapport au paramètre t . — Pour un accroissement infiniment petit dt du paramètre, x' et y' s'accroissent des quantités: $\delta x' = \xi(x'y') dt$ $\delta y' = \eta(x'y') dt$

L'ensemble de ces dernières formules s'appelle une transformation infinitésimale. Il résulte de la démonstration précédente que la transformation infinitésimale d'un groupe détermine ce groupe. — La recherche des groupes est ainsi ramenée à l'intégration d'un système d'équations différentielles.

M. Sophus Lie a généralisé ces propriétés des groupes:

Un groupe à ξ paramètres a ξ transformations infinitésimales qui ~~déterminent~~ ^{caractérisent} le groupe.

On peut obtenir un groupe quand on connaît ses ξ transformations infinitésimales, en intégrant le système d'équations différentielles qu'elles constituent —

Les ξ transformations infinitésimales d'un groupe à ξ paramètres sont liées par certaines relations.



Appliquons les conclusions de cette théorie aux équations du 1^{er} ordre, en les mettant sous la forme:

$$Y dx - X dy = 0$$

Cherchons à quelles conditions cette équation admet un groupe de transformations à 1 paramètre, c'est-à-dire à quelles conditions cette transformation n'altère ni l'équation ni son intégral général, autrement dit conserve les courbes intégrales (qui sont à elles-mêmes leurs transformées). — Soit la transformation:

$$x' = f(x, y, t)$$

$$y' = \varphi(x, y, t)$$

et la transformation infinitésimale correspondante:

$$\delta x = \xi(x, y) \delta t$$

$$\delta y = \eta(x, y) \delta t$$

Vous allons chercher quelle est la condition nécessaire pour que l'équation transformée:

$$Y(x'y') dx' - X(x'y') dy' = 0$$

soit identique à l'équation primitive donnée:

$$Y(x, y) dx - X(x, y) dy = 0$$

Considérons d'abord la transformation infinitésimale: $\frac{\delta x}{\delta t} = \xi$ $\frac{\delta y}{\delta t} = \eta$.

[Lacour; voir
Méthodes, pag. 31]

La dérivée du 1^{er} membre par rapport à t doit lui être égale, à un facteur constant près. Prenons la dérivée de la transformée:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x'} \frac{\delta x'}{\delta t} + \frac{\partial Y}{\partial y'} \frac{\delta y'}{\delta t} \right) dx' + Y(x'y') d \frac{\delta x'}{\delta t} - \left(\frac{\partial X}{\partial x'} \frac{\delta x'}{\delta t} + \frac{\partial X}{\partial y'} \frac{\delta y'}{\delta t} \right) dy' - X(x'y') d \frac{\delta y'}{\delta t}$$

$$\text{Ces:} \quad \frac{\delta x'}{\delta t} = \xi(x'y') \quad \frac{\delta y'}{\delta t} = \eta(x'y')$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x'} \xi + \frac{\partial Y}{\partial y'} \eta \right) dx' + Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x'} dx' + \frac{\partial \xi}{\partial y'} dy' \right) - \left(\frac{\partial X}{\partial x'} \xi + \frac{\partial X}{\partial y'} \eta \right) dy' - X \left(\frac{\partial \eta}{\partial x'} dx' + \frac{\partial \eta}{\partial y'} dy' \right)$$

Écrivons que les coefficients de dx' , dy' dans cette expression sont proportionnels à ceux de dx' , dy' dans: $(Y dx' - X dy')$: nous trouvons ainsi la condition:

$$\frac{Y}{X} = \frac{\xi \frac{\partial Y}{\partial x} + \eta \frac{\partial Y}{\partial y} + Y \frac{\partial \xi}{\partial x} - X \frac{\partial \eta}{\partial x}}{\xi \frac{\partial X}{\partial x} + \eta \frac{\partial X}{\partial y} - Y \frac{\partial \xi}{\partial y} + X \frac{\partial \eta}{\partial y}}$$

Cette condition est nécessaire pour que l'équation proposée admette la transformation infinitésimale. Nous allons prouver qu'elle est suffisante pour que l'équation admette la transformation finie, c'est-à-dire le groupe. On a par hypothèse:

$$\frac{\xi \frac{\partial Y}{\partial x} + \eta \frac{\partial Y}{\partial y} + Y \frac{\partial \xi}{\partial x} - X \frac{\partial \eta}{\partial x}}{Y} = \frac{\xi \frac{\partial X}{\partial x} + \eta \frac{\partial X}{\partial y} - Y \frac{\partial \xi}{\partial y} + X \frac{\partial \eta}{\partial y}}{X} = k$$

d'où, en posant:

$$Ydx - Xdy = U,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = kU$$

k est fonction de x, y, t , finie pour $t=0$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = kU$$

Intégrons: $\log \frac{U}{U_0} = \int k dt$

en appelant U_0 la valeur de U pour $t=0$: c'est-à-dire:

$$U_0 = Y(x, y) dx - X(x, y) dy$$

L'intégrale $\int k dt$ sera finie, et on aura:

$$U = U_0 e^{\int k dt}$$

l'exponentielle étant finie et différente de zéro. Donc, si $U_0 = 0$, $U = 0$; c'est-à-dire que si l'équation primitive est vérifiée, la transformée l'est aussi, autrement dit elles sont identiques. Ainsi l'équation admet le groupe, c'est-à-dire ne varie pas quand on lui fait subir la transformation finie. Géométriquement, les courbes intégrales de l'équation transformée coïncident avec celles de l'équation primitive; on dit que la transformation les

conservées, ou qu'elles sont à elles-mêmes leurs propres transformées.

Ce résultat était d'ailleurs facile à prévoir: il est évident qu'une équation qui admet la transformation infinitésimale admette aussi la transformation finie; car si la première est identique, on pourra la prolonger de proche en proche et obtenir une transformation finie qui sera elle-même identique.

Théorème. L'équation linéaire: $Ydx - Xdy = 0$
admet comme facteur intégrant:

$$\frac{1}{X\eta - Y\xi}$$

L'équation admet toujours, d'abord, la transformation insignifiante et inutile: $\delta x = \xi$ $\delta y = \eta$
qui donne:

$$Y\xi - X\eta = 0$$

Supposons:

$$X\eta - Y\xi \neq 0$$

on peut diviser par ce facteur, et l'on a la nouvelle équation:

$$\frac{Y}{X\eta - Y\xi} dx - \frac{X}{X\eta - Y\xi} dy = 0$$

dont le 1^{er} membre est une différentielle totale exacte. On a en effet:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Y}{X\eta - Y\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-X}{X\eta - Y\xi} \right) = 0$$

(page 20)

Ce théorème comprend comme cas particulier un résultat déjà connu: Si X et Y sont des fonctions homogènes de même degré en x et y , l'équation admet évidemment la transformation:

$$x' = ax$$

$$y' = ay$$

qui forme manifestement un groupe. Écrivons-le sous cette forme:

$$x' = (1+t)x$$

$$y' = (1+t)y$$

afin qu pour $t=0$, on ait:

$$x' = x, \quad y' = y.$$

29

La transformation infinitésimale correspondante est:

$$dx' = x dt \quad dy' = y dt \quad \text{D'où:} \quad \xi = x \quad \eta = y$$

Le facteur intégrant est donc dans ce cas: $\frac{1}{Xy - Yx}$

Autre exemple Une autre transformation qui constitue un groupe est la rotation d'une figure dans son plan autour de l'origine: le groupe a pour paramètre l'angle α dont la figure a tourné. On a, en coordonnées polaires:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

La transformation peut s'écrire:

$$x' = r \cos(\theta + t) \quad y' = r \sin(\theta + t)$$

ou: $x' = x \cos t - y \sin t$

$$y' = y \cos t + x \sin t$$

Pour $t=0$, on a bien:

$$x' = x, \quad y' = y.$$

Prenons les dérivées de x', y' par rapport à t , et faisons $t=0$, pour obtenir la transformation infinitésimale:

$$dx' = -y dt \quad dy' = x dt \quad \text{d'où:} \quad \xi = -y \quad \eta = x$$

Ainsi, si une équation différentielle du 1^{er} ordre admet ce groupe, elle aura pour facteur intégrant:

$$\frac{-1}{Xx + Yy}$$

Il en est ainsi pour certaines lignes tracées sur des surfaces —
Considérons par exemple les surfaces hélicoïdes:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$z = f(\theta) + k\theta$$

Les équations des lignes de courbure et des lignes asymptotiques de ces surfaces projetées sur le plan des xy , admettent le groupe précédent, c'est-à-dire ne variant pas quand la surface tourne: en effet, ces lignes se

Conseruent identiques à elle-même quand la surface est animée d'un mouvement hélicoïdal tel qu'elle coïncide toujours avec elle-même. (mouvement d'une vis dans son écrou) Donc les projections de ces lignes sur un plan perpendiculaire à l'axe Oz se conseruent dans la rotation autour de cet axe. Par suite, les équations différentielles en x, y de ces lignes admettent la transformation infinitésimale:

$$dx = -y dt \quad dy = x dt \quad \text{et par conséquent le facteur} \\ \text{intégrant:} \quad \frac{1}{x^2 + y^2}$$

On est donc certain d'obtenir les équations finies de ces lignes par des quadratures.

Plus généralement, toutes les fois qu'une certaine surface admet une transformation qui conserue ses lignes (de courbure asymptotiques, géodésiques, etc.) c'est-à-dire qui les transforme les unes dans les autres, on pourra intégrer l'équation différentielle de ses lignes. Soit par exemple la surface:

$$x^m y^n z^p = a$$

Prenons la transformation suivante: $x' = \alpha x \quad y' = \beta y$
avec la condition: $\alpha^m \beta^n = 1 \quad \beta = \alpha^{-\frac{m}{n}}$

Cette transformation ne change pas l'équation de la surface; de plus, elle forme un groupe. C'est une transformation homographique des projections des lignes sur le plan des xy : $x' = \alpha x \quad y' = \alpha^{-\frac{m}{n}} y$.

Elle conserue donc les lignes asymptotiques de la surface, ce qui prouve qu'on pourra intégrer leur équation. La transformation infinitésimale est:

$$dx' = x dt \quad dy = \mu y dt \quad \mu = -\frac{m}{n} \quad 1+t = \alpha$$

Elle est plus générale que la précédente, et fournit le facteur intégrant:

$$\xi = x \quad \eta = \mu y \quad \frac{1}{X\mu y - Yx}$$

On peut traiter ces questions relatives aux groupes par une autre méthode qui a l'avantage de pouvoir s'étendre aux équations d'ordre supérieur au 1^{er}. Elle consiste à considérer, au lieu de l'équation linéaire :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

l'équation aux dérivées partielles équivalente (Lecahier, page 117) :

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

On sait que si F est une solution de cette dernière équation, on a l'intégrale générale de la 1^{re} en posant : $F(x, y) = C$ et en donnant à la constante C toutes les valeurs possibles.

On sait aussi que toute fonction de F est solution de l'équation aux dérivées partielles, et réciproquement. Écrivons cette équation sous la forme suivante :

$$a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

a, b étant toujours des fonctions quelconques de x, y .

Cherchons à quelles conditions cette équation admet un groupe donné :

$$x' = f(x, y, t)$$

$$y' = \varphi(x, y, t)$$

~~c'est~~ nous entendons par là que si $F(x, y)$ en est une solution, $F(x', y')$ en est aussi une, et par conséquent est fonction de $F(x, y)$.

Procédons comme précédemment. Cherchons d'abord la condition nécessaire pour que l'équation admette la transformation infinitésimale :

$$x' = x + \xi \, \delta t$$

$$y' = y + \eta \, \delta t$$

$F(x', y')$ vécrit alors :

$$F(x + \xi \, \delta t, y + \eta \, \delta t) = F(x, y) + \left(\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta t$$

Pour que $F(x', y')$ soit une solution, $F(x, y)$ en étant une, il faut que $\left(\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ soit aussi une solution. ξ et η sont les dérivées $\frac{dx}{\delta t}$, $\frac{dy}{\delta t}$, donc $\left(\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ est la dérivée $\frac{\delta F}{\delta t}$.

Mais comme ξ et η sont des fonctions données, et faut se demander à quelle condition, F étant une solution quelconque l'expression: $(\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y})$ sera une solution de la même équation, c'est-à-dire sera une fonction de F , sans attacher à ξ et η la signification de dérivées. Pour cela, posons:

$$A(F) = a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$X(F) = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y}$$

et formons la combinaison:

$$A[X(F)] - X[A(F)]$$

ou:

$$a \frac{\partial}{\partial x} (\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y}) + b \frac{\partial}{\partial y} (\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y}) - \xi \frac{\partial}{\partial x} (a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y}) - \eta \frac{\partial}{\partial y} (a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y})$$

On voit que les termes du second ordre disparaissent, et il reste:

$$\left[a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} - \xi \frac{\partial a}{\partial x} - \eta \frac{\partial a}{\partial y} \right] \frac{\partial F}{\partial x} + \left[a \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi \frac{\partial b}{\partial x} - \eta \frac{\partial b}{\partial y} \right] \frac{\partial F}{\partial y}$$

ou:

$$\left[A(\xi) - X(a) \right] \frac{\partial F}{\partial x} + \left[A(\eta) - X(b) \right] \frac{\partial F}{\partial y} = B(F)$$

Nous supposons que F est une solution de l'équation différentielle:

$$A(F) = 0$$

Nous voulons que $X(F)$ soit aussi une solution de cette équation, c'est-à-dire que:

$$A(X) = 0$$

Donc on a: $A(X) - X(A) = B(F) = 0$

c'est-à-dire que F est une solution de l'équation différentielle:

$$B(F) = 0$$

Cette équation étant équivalente à: $A(F) = 0$, leurs coefficients doivent être proportionnels: $\frac{A(\xi) - X(a)}{a} = \frac{A(\eta) - X(b)}{b}$

Telle est la condition nécessaire; on va démontrer qu'elle est suffisante.

Réciproquement, si cette condition est remplie, et que F soit une solution de: $A(F) = 0$, elle sera aussi solution de: $B(F) = 0$.

Dans l'identité:

$$A(X) - X(A) = B(F)$$

$B(F)$ et $X(A)$ sont nuls; donc on a: $A[X(F)] = 0$

ce qui prouve que $X(F)$ est aussi une solution de: $A(F) = 0$.

Ainsi la proposition:

$$\frac{A(\xi) - X(a)}{a} = \frac{A(\eta) - X(b)}{b}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation aux dérivées partielles:

$$a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

admette la transformation infinitésimale:

$$dx = \xi(x, y) dt$$

$$dy = \eta(x, y) dt$$

On verrait aisément que cette condition est la même, sous une autre forme, que celle qu'on a trouvée plus haut (page 27).

Passons maintenant à la transformation finie; nous allons prouver que l'équation aux dérivées partielles s'admet sous la même condition que la transformation infinitésimale, c'est-à-dire que $F(x', y')$ est solution de cette équation si $F(x, y)$ l'est, ou que $F(x', y')$ est fonction de $F(x, y)$. — Prenons la dérivée de $F(x', y')$ par rapport au paramètre t de la transformation finie:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} = \xi \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y'} = X[F(x', y')]$$

d'où:

$$\frac{\partial F}{X(F)} = dt$$

Intégrons:

$$\int \frac{\partial F}{X(F)} = \Phi(F) = t + C$$

Calculons C : pour $t = 0$,

$$C = \Phi[F(x, y)]$$

Donc:

$$\Phi[F(x', y')] = t + \Phi[F(x, y)]$$

34
 à qui prouve que $F(x, y')$ est fonction de $F(x, y)$ comme nous
 l'avions annoncé.

— Considérons maintenant l'équation différentielle du 2^e ordre:

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

Cherchons si cette équation admet un groupe donné, c'est-à-dire si elle
 ne varie pas quand on y fait la transformation:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x, y, t) & y_1 &= \varphi(x, y, t) \\ y'_1 &= \frac{dy_1}{dx_1} & y''_1 &= \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} \end{aligned}$$

Prenez par exemple l'équation homogène du 2^e ordre; cherchons
 d'abord quelle est sa forme. Pour l'équation homogène du 1^{er}
 degré:

$$f(x, y, y') = 0 \quad \text{où} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

elle ne change pas quand on y remplace x par ax , y par ay ;
 y' reste la même, la constante a s'éliminant d'elle-même.

Il suffit donc que l'équation soit homogène en x et y comme
 une équation algébrique. Mais pour l'équation du 2^e ordre, si
 on y change x en ax , y en ay , $\frac{dy}{dx}$ ne change pas, et

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ devient $\frac{1}{a} \frac{d^2 y}{dx^2}$ (parce que: $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{dx_1}$
 Or: $\frac{dx}{dx_1} = \frac{1}{a}$)

Pour que l'équation soit homogène, il faut
 qu'on ait identiquement quel que soit a :

$$f(ax, ay, \frac{dy}{dx}, \frac{1}{a} \frac{d^2 y}{dx^2}) = a^n f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2})$$

où: $f(ax, ay, y', \frac{y''}{a}) = 0$ quand: $f(x, y, y', y'') = 0$.

Faisons dans l'équation homogène du 2^e ordre la transformation.

$$x = e^t \quad y = ze^t \quad t \text{ est la nouvelle variable, } z \text{ la nouvelle fonction.} \quad \text{On a :} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \quad (y = zx)$$

$$\frac{dy}{dx} = z + \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x} \frac{dz}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d^2z}{dt^2}$$

L'équation différentielle devient, par la substitution:

$$f\left(x, zx, z + \frac{dz}{dt}, \frac{1}{x} \frac{dz}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0$$

Comme elle est homogène, elle ne dépend pas de x , qui s'élimine en facteur comme un paramètre. Elle se réduit donc à:

$$f\left(1, z, z + \frac{dz}{dt}, \frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0$$

qui ne contient pas la variable indépendante t .

En vertu d'une propriété générale des équations différentielles, une équation qui ne contient pas la variable indépendante peut se ramener à une équation de degré au moins d'une unité.

Soit l'équation du 2^e ordre $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

Posons: $\frac{dy}{dx} = p$ y sera la variable, p la fonction.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$$

L'équation transformée est:
du 1^{er} ordre.

$$f\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

En résolvant cette équation, on tirera p en fonction de y :

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi(y)$$

et l'on aura x par une quadrature.

$$dx = \frac{dy}{\varphi(y)}$$

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)}$$

Il suffira de faire l'inversion de cette intégral pour obtenir y en fonction de x .

Ainsi une équation homogène du 2^e ordre admet le groupe :

$$x_1 = ax$$

$$y_1 = ay$$

et son intégration se ramène à la résolution d'une équation du 1^{er} ordre suivie d'une quadrature.

— Considérons le groupe : (1) $x_1 = \varphi(x, y, t)$ $y_1 = f(x, y, t)$ (2)

Supposons que y soit fonction de x ; alors, en vertu des équations (1) et (2), y_1 sera fonction de x_1 . Sa dérivée sera :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy} \quad \text{ou :} \quad y'_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'} \quad (3)$$

Les 3 équations (1) (2) (3) forment un groupe de transformations :

$$x_1 = \varphi(x, y, t) \quad y_1 = f(x, y, t) \quad y'_1 = \psi(x, y, y', t)$$

Ainsi d'un groupe de transformations à 2 variables on peut déduire un groupe à 3 variables x, y, y' ou $\frac{dy}{dx}$. Cherchons la transformation infinitésimale correspondante, et calculons $\delta y'_1$:

$$\delta y'_1 = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dx \delta dy - dy \delta dx}{dx^2}$$

$$\text{Or :} \quad \delta dy = d\delta y = d(\eta dt) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \right) dt$$

$$\delta dx = d\delta x = d(\xi dt) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \right) dt$$

Substituons ces expressions dans $\delta y'_1$; il vient :

$$\delta y'_1 = \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2 \right] dt = \eta_1(x, y, y') dt.$$

La transformation infinitésimale se compose des 3 équations :

$$\delta x = \xi(x, y) dt \quad \delta y = \eta(x, y) dt \quad \delta y'_1 = \eta_1(x, y, y') dt$$

— On pourrait reprendre ici l'équation différentielle du 1^{er} ordre :

$$y' = \Phi(x, y)$$

et la traiter par une 3e méthode.

Elle admettra le groupe (1) (2) si elle admet le groupe (1) (2) (3) ou sa transformation infinitésimale que nous venons de écrire.

Cherchons à quelle condition l'équation ne changera pas quand on y remplacera x par $x + \delta x$, y par $y + \delta y$, y' par $y' + \delta y'$.

On trouve aisément que pour cela il faut que l'on ait l'identité:

$$\delta y' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y \quad \text{ou:} \quad \eta_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \eta$$

En exprimant cette condition, on retrouverait la relation déjà trouvée sous 2 formes différentes (pages 27 et 32)

On vérifierait aussi de la même manière que si l'équation admet la transformation infinitésimale, elle admet le groupe lui-même.

Nous venons d'étendre le groupe à la dérivée première de y . étendons-le encore à la dérivée seconde, afin de pouvoir appliquer cette nouvelle méthode à l'équation différentielle du 2e ordre.

$$\text{On aura: } y_1'' = \frac{dy_1'}{dx_1} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial y'} \delta y'}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y} = \chi(x, y, y', y_1'', t) \quad (4)$$

Les équations (1) (2) (3) (4) formeront un groupe, par lequel on transformera x, y, y', y'' en x_1, y_1, y_1', y_1'' .

La transformation infinitésimale correspondante se calcule aisément:

$$\delta y'' = \delta \frac{dy'}{dx} = \frac{dx \delta dy' - dy' \delta dx}{dx^2} \quad \text{On a:}$$

$$\delta dy' = d\delta y' = \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \eta_1}{\partial y'} \delta y' \right) \delta t$$

$$\delta dx = d\delta x = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \delta y \right) \delta t$$

Substituons:

$$\delta y'' = \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} y' + \frac{\partial \eta_1}{\partial y'} y'' - \frac{\partial \xi}{\partial x} y'' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y' y'' \right) \delta t = \eta_2(x, y, y', y'') \delta t.$$

Donc la transformation infinitésimale:

$$\delta x = \xi(x, y) \delta t \quad \delta y = \eta(x, y) \delta t \quad \delta y' = \eta_1(x, y, y') \delta t \quad \delta y'' = \eta_2(x, y, y', y'') \delta t$$

- Considérons maintenant l'équation différentielle du 2^e ordre:

$$y'' = \Phi(x, y, y')$$

et cherchons à quelles conditions elle admet le groupe précédent.

On devra avoir identiquement: $\delta y'' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \delta y'$

ou, en substituant:

$$\eta_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \eta_1$$

Cette relation doit devenir une identité quand on y remplace y'' par $\Phi(x, y, y')$. Ce sera une identité entre x, y, y' . Or ξ et η ne contiennent que x et y ; donc tous les coefficients de y' devront être nuls. On aura en général un certain nombre d'équations de condition, ou même une infinité, auxquelles les fonctions ξ et η devront satisfaire. Donc, en général, l'équation du 2^e ordre n'admettra pas le groupe proposé, ξ et η étant des fonctions quelconques.

On voit que ce résultat est bien différent de celui que nous avons obtenu pour l'équation du 1^{er} ordre: celle-ci admet toujours un groupe, moyennant une condition imposée aux 2 fonctions ξ et η ; l'équation d'ordre supérieur n'admettant un groupe que lorsqu'elles sont d'une forme particulière: ce sont des cas exceptionnels.

On a vu un de ces cas particuliers précédemment (page 36): l'équation homogène du 2^e degré admet la transformation infinitésimale:

$$dx = x dt$$

$$dy = y dt$$

Il y a intérêt à connaître une transformation infinitésimale admissible par une équation différentielle: si elle est unique, on peut déterminer les 2 fonctions ξ, η qui la constituent. On en tire parti pour abaisser l'ordre de l'équation différentielle.

En particulier, si une équation du 2^e ordre admet une transformation infinitésimale:

$$dx = \xi dt,$$

$$dy = \eta dt,$$

son intégration se ramène à l'intégration d'une équation du 1^{er} ordre et à une quadrature. — L'équation homogène traitée ci-dessus en est l'exemple le plus simple.

Pour démontrer ce théorème, nous emploierons une autre méthode. Au lieu d'une équation du 2^e ordre, on peut considérer 2 équations du 1^{er} ordre:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad (1)$$

X, Y, Z étant des fonctions de x, y, z . Elles sont équivalentes à l'équation aux dérivées partielles:

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} + Z \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Soient: $F_1(x, y, z)$

$F_2(x, y, z)$

2 solutions de cette équation (2): toute autre solution de cette équation sera une fonction de F_1 et F_2 , et une fonction quelconque de F_1, F_2 sera une solution de cette équation (2), et l'intégrale générale des équations (1) sera représentée par les 2 équations:

$$F_1(x, y, z) = C_1$$

$$F_2(x, y, z) = C_2$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires. Soit d'autre part une transformation infinitésimale:

$$dy = \eta(x, y, z) dt$$

$$dx = \xi(x, y, z) dt$$

$$dz = \zeta(x, y, z) dt$$

Cherchons à quelle condition les équations (1) admettront ce groupe. Si l'on remplace x par $x + \delta x$, y par $y + \delta y$, z par $z + \delta z$, l'équation (2) doit rester identique à elle-même, c'est-à-dire que :

$$B(F) = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} \quad \text{doit en être une solution}$$

En effectuant la combinaison : $A[B(F)] - B[A(F)] = C(F)$ et en raisonnant comme précédemment dans le cas de 2 variables (page 32) on trouve que $C(F)$ doit être identique à un facteur près, à $A(F)$, c'est-à-dire qu'on doit avoir :

$$A(B) - B(A) = \lambda A(F) \quad \lambda \text{ étant fonction de } x, y, z$$

C'est la condition pour que l'équation (2) : $A(F) = 0$ admette la transformation proposée.

On est amené à se demander si, en supposant que l'équation (2) aux dérivées partielles admet cette transformation infinitésimale (ξ, η, ζ) , on peut s'en servir pour déterminer l'intégrale de l'équation (1). Mais avant d'étudier cette question, nous établirons quelques lemmes relatifs aux équations linéaires, d'après Clebsch. Soit une équation linéaire aux dérivées partielles :

$$A(F) = a_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \quad (1)$$

a_1, a_2, \dots, a_n étant des fonctions des variables x_1, x_2, \dots, x_n . Elle est équivalente au système de $(n-1)$ équations du 1^{er} ordre :

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} \quad (2)$$

Soient F_1, F_2, \dots, F_{n-1} $(n-1)$ solutions de l'équation (1) ; les équations (2) admettent les $(n-1)$ intégrales premières :

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1 \quad F_2 = C_2 \quad \dots \quad F_{n-1} = C_{n-1}$$

41

Toute fonction de F_1, F_2, \dots, F_{n-1} est une solution de l'équation (1) et réciproquement. — Soit une équation de même forme

$$B(F) = b_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + b_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

Cherchons à quelle condition ces deux équations aux dérivées partielles admettent des solutions communes, à part la solution insignifiante :

$$F = C^{\text{te}}$$

Nous ne considérons que les solutions distinctes, c'est-à-dire qui ne dépendent pas les uns des autres, puisqu'il y a une infinité de fonctions des solutions qui sont elles-mêmes des solutions. — S'il y a des solutions distinctes communes, elles sont nécessairement en nombre fini, car chaque équation a $(n-1)$ solutions distinctes, et il y en aura au plus $(n-1)$. Reste à savoir : 1° combien il y en a ; 2° comment on peut les trouver.

Formons encore la combinaison suivante, que nous désignerons par le symbole :

$$(A, B) = A[B(F)] - B[A(F)]$$

C'est une expression linéaire par rapport aux dérivées premières, car on sait que les dérivées secondes disparaissent dans la différence :

$$\left[A(b_1) - B(a_1) \right] \frac{\partial F}{\partial x_1} + \left[A(b_2) - B(a_2) \right] \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \left[A(b_n) - B(a_n) \right] \frac{\partial F}{\partial x_n} = (A, B)$$

Supposons qu'il existe une solution commune aux deux équations :

$$A(F) = 0$$

$$B(F) = 0$$

elle annule A, B , donc elle annule (A, B) ; elle sera une solution de l'équation :

$$(A, B) = 0.$$

Il faut distinguer 2 cas : 1° — On voit cette dernière équation n'est qu'une combinaison linéaire des 2 premières, c'est-à-dire qu'on a :

$$(A, B) = \lambda A(F) + \mu B(F)$$

alors elle sera nécessairement vérifiée par toute solution commune, puisqu'elle n'est pas distincte des 2 premières;

2^o Or bien la nouvelle équation est indépendante des 2 autres, et on a:

$$(A, B) = C_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + C_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = C(F)$$

Alors la solution commune vérifie les 3 équations linéaires distinctes:

$$A(F) = 0 \quad B(F) = 0 \quad C(F) = 0$$

En répétant le même raisonnement sur le système de 3 équations linéaires qui a pour solutions communes les solutions communes aux 2 premières équations, on fournira les combinaisons de ces équations deux à deux: $(A, B) = C$, (B, C) , (C, A)

Si ce sont de simples combinaisons linéaires de A, B, C , on les négligera, comme ne fournissant pas d'équations distinctes; sinon, on obtiendra des équations nouvelles de même forme:

$$D(F) = 0 \quad E(F) = 0 \quad \dots$$

qui vérifieront encore les solutions communes, et qu'on ajoutera aux précédentes. On opérera de même sur le nouveau système, en lui ajoutant les équations fournies par les combinaisons distinctes des équations anciennes, jusqu'à ce qu'on obtienne un système tel que les combinaisons deux à deux de toutes ses équations se réduisent à des combinaisons linéaires de ces équations.

Or ce terme doit nécessairement être atteint; car on ne peut avoir plus de n équations distinctes entre les n dérivées partielles de F . Un système formé comme nous venons de le dire s'appelle un système complet. Il comprend n équations au plus:

$$A(F) = 0 \quad B(F) = 0 \quad C(F) = 0 \quad \dots \quad L(F) = 0$$

Le cas le moins intéressant est celui où il contient n équations. Le déterminant fonctionnel de A, B, C, \dots, I , n'est pas nul, puisque par hypothèse aucune de ces expressions n'est une combinaison linéaire des autres; d'ailleurs, si tous les termes d'une ligne ou d'une colonne étaient nuls, il n'y aurait plus n équations, ou il n'y aurait plus n variables. On a donc identiquement: $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$

Ceci prouve que la seule solution commune aux n équations, et par suite aux 2 premières, est: $F = C^{te}$

Dans le cas général où le système complet contient $(n-p)$ équations, demandons nous s'il y a des solutions communes.

Lemme. I. La combinaison: $A[B(F)]$ est invariante par rapport aux variables indépendantes. En effet, elle est linéaire par rapport aux dérivées; donc si l'on a un système complet pour les variables x_1, x_2, \dots, x_n , on aura le même système complet avec les nouvelles variables x'_1, x'_2, \dots, x'_n .

II. Si l'on forme $(n-p)$ combinaisons linéaires distinctes des équations d'un système complet:

$$A_1 = \lambda A + \mu B + \dots + \nu I = 0$$

$$B_1 = \lambda' A + \mu' B + \dots + \nu' I = 0$$

$$I_1 = \lambda^{n-p} A + \mu^{n-p} B + \dots + \nu^{n-p} I = 0$$

Ces équations formeront un nouveau système complet. En effet, combinons-en 2 quelconques: $(A_1, B_1) = \Sigma (\lambda A, \mu' B)$

$$\text{Or: } (\lambda A, \mu' B) = \lambda A(\mu' B) - \mu' B(\lambda A) = \lambda B A(\mu') - \mu' A B(\lambda) + \lambda \mu' (A, B)$$

On obtient une combinaison linéaire de A et B , en général, toute combinaison de 2 des fonctions A, B, \dots, L , est une combinaison linéaire de A, B, \dots, L , c.à.d. de A, B, \dots, L . Ainsi le système reste complet quand on remplace les fonctions A, B, \dots, L par des combinaisons linéaires de ces fonctions.

On appelle système jacobien un système complet pour lequel la combinaison de 2 quelconques des équations, comme (A, B) est identiquement nulle.

Théorème. D'un système complet on peut tirer un système jacobien par des opérations algébriques.

En effet, on peut résoudre les $(n-p)$ équations du système complet par rapport à $(n-p)$ dérivées partielles; on obtient ainsi:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \sum a'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} - \sum b'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n-p}} - \sum l'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}} = 0$$

Ces nouvelles équations sont des combinaisons linéaires des premières; donc elles forment un système complet. Ce nouveau système est, de plus, un système jacobien: en effet,

Théorème: Un système complet de $(n-p)$ équations admet p solutions distinctes.

Puisqu'on peut transformer un système complet en un système jacobien équivalent, supposons que le système complet:

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0, \quad \dots \quad I=0$$

soit jacobien.

La 1^{re} équation a pour solutions $(n-1)$ fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n , qu'on nous appellera:

$$y_2, y_3, \dots, y_n$$

Ajoutons-y une fonction quelconque y_1 de x_1, x_2, \dots, x_n , soumise à la seule condition que le déterminant fonctionnel de $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ ne soit pas nul. Prenons ces n lettres pour nouvelles variables; en résolvant le système:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = y_1$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = y_2$$

$$f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = y_n$$

par rapport aux anciennes variables, on tirera x_1, x_2, \dots, x_n en fonction de y_1, y_2, \dots, y_n .

Cherchons quelle sera la forme des équations du système après ce changement de variables. La 1^{re} exprimera qu'une fonction quelconque de y_2, y_3, \dots, y_n est une solution, c.à.d. qu'elle n'est pas de y_1 :

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0.$$

On résoudra les autres équations par rapport aux dérivées partielles prises relatives aux nouvelles variables y_2, y_3, \dots, y_n :

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} - \sum b'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial y_{n-p+1}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_3} - \sum c'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial y_{n-p+1}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_{n-p}} - \sum l'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial y_{n-p+1}} = 0$$

On aura en tout $(n-p)$ équations transformées en $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ qui forment un système jacobien. Or les coefficients b', c', \dots, l' sont fonctions de y_2, y_3, \dots, y_n , mais ne dépendent pas de y_1 ; on a donc ci-dessus $(n-p-1)$ équations à $(n-1)$ variables. En effet, les combinaisons de ces équations deux à deux étant identiquement nulles, on a par exemple :

$$-\frac{\partial F}{\partial y_{n-p+1}} \times \frac{\partial b'_{n-p+1}}{\partial y_1} = 0 \quad \text{d'où :} \quad \frac{\partial b'_{n-p+1}}{\partial y_1} = 0$$

On est donc ramené à résoudre un système jacobien de $(n-p-1)$ équations à $(n-1)$ variables. En opérant et raisonnant de même de proche en proche, on ramènera la recherche des solutions communes des $(n-p)$ équations primitives à la résolution d'une équation unique à $(p+1)$ variables, qui a en général p solutions distinctes. Le théorème est donc démontré.

Le raisonnement dont nous nous sommes servi pour établir le théorème précédent fournit en même temps une méthode pour trouver ces p solutions distinctes. Mais cette méthode serait longue à peindre, car il faudrait résoudre le système de $(n-p)$ équations à n variables, puis le système de $(n-p-1)$ équations à $(n-1)$ variables,

et ainsi de suite, une série de systèmes jusqu'à l'équation unique à $(p+1)$ variables. On peut trouver une méthode plus simple pour laquelle le nombre des équations est réduit au minimum, savoir p équations pour déterminer les p solutions.

- Considérons une seule équation linéaire aux dérivées partielles:

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

elle sera intégrée si l'on peut intégrer le système équivalent de $(n-1)$ équations ordinaires à n variables:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}$$

qui aura $(n-1)$ intégrales premières de la forme:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

que nous supposons holomorphes au voisinage d'un certain point (ou système de valeurs des n variables); ce point peut toujours être pris pour origine (c'est alors le système: $(0, 0, \dots, 0)$).

Si l'on peut obtenir les fonctions f_1, f_2, \dots, f_{n-1} , on pourra faire en sorte que pour: $x_1 = 0$,

la solution de l'équation aux dérivées partielles se réduise à une fonction donnée: $F(x_2, x_3, \dots, x_n)$

Pour cela soit: $\Psi(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$

la solution la plus générale de l'équation; on devra choisir la fonction Ψ de manière que:

$$\Psi[f_1(0, x_2, \dots, x_n), f_2(0, x_2, \dots, x_n), \dots, f_{n-1}(0, x_2, \dots, x_n)]$$

soit identique à $F(x_2, x_3, \dots, x_n)$ - Si l'on pose:

$y_1 = f_1(0, x_2, \dots, x_n)$ $y_2 = f_2(0, x_2, \dots, x_n)$ $y_{n-1} = f_{n-1}(0, x_2, \dots, x_n)$
 on aura l'identité suivante:

$$\psi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = F(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Cette remarque faite, revenons au système d'équations jacobien:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sum a_{n-p+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-p+1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \sum b_{n-p+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-p+1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-p}} = \sum l_{n-p+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-p+1}}$$

Nous savons qu'il admet p solutions distinctes. Effectuons le changement de variables suivant, proposé par M. Meyer. Posons:

$$x_2 = x_1 y_2 \quad x_3 = x_1 y_3 \quad \dots \quad x_{n-p} = x_1 y_{n-p}$$

ce qui substitue aux $(n-p-1)$ variables: x_2, x_3, \dots, x_{n-p}
 les nouvelles variables: y_2, y_3, \dots, y_{n-p}

On conserve les anciennes variables: $x_1, x_{n-p+1}, \dots, x_n$

Alors: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-p}, x_{n-p+1}, \dots, x_n)$

et l'on aura encore un système jacobien pour F comme pour f

Calculons les dérivées partielles de F :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots + y_{n-p} \frac{\partial f}{\partial x_{n-p}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} x_1 \quad \frac{\partial F}{\partial y_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3} x_1 \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial y_{n-p}} = \frac{\partial f}{\partial x_{n-p}} x_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{n-p+1}} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Si l'on substitue dans ces relations les valeurs des dérivées partielles de f tirées de l'ancien système, on obtient le nouveau système:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \sum \alpha'_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = x_1 \sum b_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_{n-p}} = x_1 \sum l_{n-p+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-p+1}}$$

Tel est le système jacobien relatif aux nouvelles variables; les coefficients α', b, \dots, l sont des fonctions holomorphes de:

$x_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-p}, x_{n-p+1}, \dots, x_n$
 au voisinage du système origine. — Il ne diffère du précédent qu'en ce que x_1 est facteur dans toutes les dérivées relatives aux y . — Si l'on sait intégrer la 1^{re} équation de ce système, on peut, en vertu de la remarque précédente, faire en sorte que pour $x_1 = 0$, la solution se réduise à une fonction donnée des autres variables, par exemple pour qu'on ait:

$$f_1(x_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-p}, x_{n-p+1}, \dots, x_n) = x_{n-p+1}$$

Le même, on pourra trouver une solution de la même équation (1) se réduisant, pour $x_1 = 0$, à x_{n-p+2} .

$$f_2(x_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-p}, x_{n-p+1}, \dots, x_n) = x_{n-p+2}$$

et ainsi de suite, jusqu'à une p^{e} solution se réduisant pour $x_1 = 0$, à x_n .

$$f_p(x_1, y_2, \dots, y_{n-p}, x_{n-p+1}, \dots, x_n) = x_n.$$

Or la recherche des $(n-1)$ solutions distinctes de l'équation (1) revient à l'intégration du système suivant :

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dy_2}{0} = \frac{dy_3}{0} = \dots = \frac{dy_{n-p}}{0} = \frac{dx_{n-p+1}}{-a'_{n-p+1}} = \dots = \frac{dx_n}{-a'_n}$$

Mais nous connaissons $(n-p-1)$ solutions de l'équation (1) ces sont :

$$y_2 = C^1, \quad y_3 = C^2, \quad \dots, \quad y_{n-p} = C^{n-p}$$

puisque l'on a : $dy_2 = 0, \quad dy_3 = 0, \quad \dots, \quad dy_{n-p} = 0$.

Il reste p équations qui détermineront les p autres solutions ; en intégrant le système de p équations du 1^{er} ordre, on trouvera les solutions : f_1, f_2, \dots, f_p qui se réduisent pour $x_1 = 0$,

à :

$$x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \dots, x_n.$$

Toute solution de l'équation (1) sera donc de la forme :

$$\Psi(y_2, y_3, \dots, y_{n-p}, f_1, f_2, \dots, f_p)$$

fonction des $(n-1)$ solutions distinctes.

Le problème est dès lors résolu ; de la forme générale de la solution de l'équation (1) on déduit immédiatement celle de la solution commune aux p équations du système.

Substituons Ψ dans l'équation (2) et faisons $x_1 = 0$; pour que Ψ soit une solution commune à (1) et (2) il faut qu'on ait identiquement :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial f_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2} \right) = 0$$

Calculons $\frac{\partial f_1}{\partial y_2}$ pour $x_1 = 0$. Comme y_2 ne dépend pas de x_1 ,

on peut commencer par annuler x_1 dans f avant de dériver.

or: $f_1(0, y_2, y_3, \dots, y_{n-p}, y_{n-p+1}, \dots, x_n) = x_{n-p+1}$

qui s'annule pour $x_1 = 0$; donc: $\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right) = 0$

et l'on doit avoir identiquement: $\frac{\partial \Psi}{\partial y_2} = 0$

Ce qui prouve que Ψ ne dépend pas de y_2 . On montrera de même que Ψ ne dépend pas de y_3, \dots, y_p . Donc la solution commune aux p équations a pour forme générale:

$$\Psi(f_1, f_2, \dots, f_p)$$

et c'est la seule, car nous savons que le système n'admet que p solutions distinctes. On voit qu'elle se réduit, pour $x_1 = 0$, à:

$$\Psi(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \dots, x_n)$$

Si donc on peut trouver une solution de cette forme pour l'éq. (1) on sera assuré qu'elle vérifie toutes les autres équations du système, c'est-à-dire qu'elle est une solution commune.

Tout revient à intégrer l'équation (1), c'est-à-dire p équations du 1^{er} ordre, qui fourniront les p solutions distinctes communes aux équations du système jacobien. Cette méthode ramène le problème à sa plus simple expression; mais la première méthode était nécessaire pour prouver qu'il n'y a que p solutions distinctes, et c'est sur ce résultat que repose la seconde.

Revenons à l'équation linéaire du 2^e ordre, mise sous la forme:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

On a (page 39) qu'elle équivaut à l'équation aux dérivées partielles:

$$A(f) = X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Étant donné une transformation infinitésimale :

$$\delta x = \xi(x, y, z) \delta t \quad \delta y = \eta(x, y, z) \delta t \quad \delta z = \zeta(x, y, z) \delta t$$

où ξ, η, ζ ne sont pas proportionnels à X, Y, Z ; si l'on pose :

$$B(f) = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation aux dérivées partielles admette cette transformation infinitésimale est que :

$$(A, B) = A(B) - B(A) = \lambda A.$$

λ étant une fonction de x, y, z ; et pour que le groupe fini correspondant :

$$x' = \varphi(x, y, z, t) \quad y' = \psi(x, y, z, t) \quad z' = \omega(x, y, z, t)$$

laisse invariable l'équation, c'est-à-dire pour que $f(x', y', z')$ en soit une solution, $f(x, y, z)$ en soit aussi une.

Remarquons que les 2 équations : $A(f) = 0$, $B(f) = 0$ forment un système complet, puisque par hypothèse :

$$(A, B) = \lambda A$$

C'est un système de 2 équations à 3 variables ; donc : $p = 1$.

Il y a 1 solution commune aux 2 équations ; et pour la trouver, il suffira d'intégrer 1 équation du 1^{er} ordre. Cette équation fournira donc une solution f_1 de l'équation proposée. Or elle admet 2 solutions distinctes ; pour trouver la seconde, f_2 , il semble qu'il faille intégrer une autre équation du 1^{er} ordre ; mais on va montrer qu'une quadrature suffit pour achever l'intégration.

Pour cela, substituons à la variable z la variable f_1 , en tirant z de l'équation :

$$f_1(x, y, z) = u$$

On sait que toute fonction de f_1 est solution de l'équation proposée :

or la 2^e solution distincte f_2 ne doit pas être fonction de f_1 ou u .
donc elle vérifie l'équation:

$$P(x, y, u) \frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y, u) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

dont le 2^e membre est $A(f)$ où l'on a fait: $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$.

f_1 est solution de cette équation, où l'on suppose u constante.

C'est une équation à 2 variables admettant la transformation infinitésimale:

$$dx = P_1(x, y, u) dt \quad dy = Q_1(x, y, u) dt$$

P_1, Q_1 étant ce qu'on deviennait ξ, η quand on y remplace x par son expression en fonction de u . On a ainsi:

$$B(f) = P_1(x, y, u) \frac{\partial f}{\partial x} + Q_1(x, y, u) \frac{\partial f}{\partial y}$$

L'équation aux dérivées partielles que vérifie f_2 peut être remplacée par l'équation équivalente du 1^{er} ordre:

$$P(x, y, u) dx - Q(x, y, u) dy = 0$$

Puisqu'elle admet la transformation infinitésimale précédente, on en connaît un facteur intégrant:

$$\frac{1}{-QQ_1 - PP_1}$$

et par conséquent on peut l'intégrer par une simple quadrature.

En général, une équation différentielle du 2^e ordre:

$$y'' = f(x, y, y')$$

qui admet une transformation infinitésimale, peut se ramener à une équation du 1^{er} ordre plus une quadrature: car elle peut être considérée comme un cas particulier du système:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

que nous venons de traiter. (C'est le théorème annoncé page 39.)

54
Ainsi la connaissance d'une transformation infinitésimale qui laisse invariable l'équation du 2^e ordre réduit son intégration à celle d'une équation du 1^{er} ordre suivie d'une quadrature. Mais il ne faut pas oublier que l'équation du 2^e ordre n'admet pas, en général, de transformation infinitésimale.

Nous allons appliquer la méthode précédente à quelques exemples simples et classiques, que la considération des groupes permet de traiter par les mêmes procédés et de réunir sous une seule règle.

Remarque générale Avant de traiter ces cas particuliers, disons ce qu'on entend par fonctions invariantes ou invariants d'un groupe dont on connaît la transformation infinitésimale.

Soient x', y', z' les variables transformées du groupe fini; pour qu'une fonction f soit invariante par rapport à ce groupe, il faut qu'on ait identiquement:

$$f(x', y', z') = f(x, y, z)$$

Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait identiquement:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{ou:} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \xi + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta = 0$$

ξ, η, ζ étant les fonctions qui définissent la transformation infinitésimale. Donc les invariants du groupe sont les solutions de l'équation précédente aux dérivées partielles. Dans le cas de 3 variables, il y a 2 solutions distinctes, f_1, f_2 ; alors toute fonction de f_1 et f_2 sera un invariant du groupe.

— Le groupe qui représente la rotation d'une figure dans l'espace autour de l'axe Ox a pour transformation infinitésimale

$$\begin{aligned} dx &= y dt \\ \text{ou: } \xi &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy &= -x dt \\ \eta &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz &= 0 \\ \zeta &= 0 \end{aligned}$$

55

Un autre groupe, qui définit les surfaces spirales, se déduit du précédent en ajoutant à la rotation une réduction homothétique proportionnelle à dt , par rapport à l'origine; la transformation infinitésimale correspondante est:

$$dx = (y + \lambda x) dt \quad dy = (-x + \lambda y) dt \quad dz = \lambda z dt$$

Les surfaces spirales sont les invariants de ce groupe dit spiral; Soient f_1, f_2 les 2 solutions distinctes de l'équation aux dérivées partielles:

$$(y + \lambda x) \frac{\partial f}{\partial x} + (-x + \lambda y) \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

L'on aura les surfaces spirales en égalant à 0 f_1, f_2 et toute fonction de f_1 et f_2 . — L'équation précédente équivaut au système:

$$\frac{dx}{y + \lambda x} = \frac{dy}{-x + \lambda y} = \frac{dz}{\lambda z}$$

ou:

$$\frac{x dx + y dy}{\lambda (x^2 + y^2)} = \frac{x dy - y dx}{-(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{\lambda z}$$

qu'on intègre par quadratures: on a d'abord:

$$\frac{dz}{z} = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} \quad \text{d'où: } \log z = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \log C$$

$$z = C \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dx}{z} = \lambda \frac{x dy - y dx}{-(x^2 + y^2)} \quad \log x = -\lambda \arctg \frac{y}{x} + C$$

d'où l'équation générale des surfaces spirales:

$$\log x + \lambda \arctg \frac{y}{x} = F\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Cette transformation conserve les lignes de la surface, comme il est aisé de le montrer géométriquement. La recherche des lignes de courbure et des lignes asymptotiques est donc ramenée aux quadratures;

l'équation du 2^e ordre des lignes géodésiques, admettant une transformation infinitésimale, se ramène à une équation du 1^{er} ordre.
(Sophus Lie, ap. Mathematische Annalen, tome XX.)

Considérons l'équation linéaire homogène de la forme:

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + p_{m-1} \frac{dy}{dx} + p_m y = 0$$

qu'on appelle aussi équation sans second membre.

La propriété fondamentale est la suivante:

Si y_1 en est une solution, $C_1 y_1$ en sera aussi une, car cela revient à multiplier le 1^{er} membre par le facteur constant C_1 .

Si donc on a m solutions: y_1, y_2, \dots, y_m , on aura encore une solution en formant la combinaison linéaire:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m$$

puisque chacun des termes: $C_1 y_1, C_2 y_2, \dots, C_m y_m$ est lui-même une solution. Cette expression, où figurent m constantes arbitraires, sera l'intégrale générale de l'équation linéaire si l'on peut déterminer ces constantes de telle sorte qu'au voisinage de la valeur x_0 (qu'on suppose n'être pas un point singulier pour les coefficients p_1, p_2, \dots, p_m), y et ses $(m-1)$ premières dérivées prennent des valeurs assignées à l'avance; car on sait que dans ces conditions il n'y a qu'une seule solution possible. — On a effectivement pour déterminer C_1, C_2, \dots, C_m les m équations suivantes:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + C_m \frac{dy_m}{dx}$$

57

$$\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = C_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + C_2 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + \dots + C_m \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}}$$

On peut toujours faire en sorte que le déterminant ne soit pas nul:

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_m}{dx} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} & \dots & \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

car pour $x = x_0$, tous les éléments peuvent recevoir des valeurs arbitraires.

On tirera donc C_1, C_2, \dots, C_m des m équations précédentes.

Ainsi les m intégrales particulières de l'équation linéaire:

y_1, y_2, \dots, y_m
forment un système fondamental au moyen duquel on peut obtenir toutes les autres solutions par des combinaisons linéaires à coefficients constants.

On sait que les points singuliers des intégrales ne peuvent être que les points singuliers des coefficients p_1, p_2, \dots, p_m , c'est-à-dire des points singuliers fixes. Or y_1, y_2, \dots, y_m étant holomorphes au voisinage du point x_0 , l'intégrale générale $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m$ sera aussi holomorphe. Les seuls points singuliers des intégrales sont donc ceux où les coefficients cessent d'être uniformes et continus.

Le déterminant précédent, formé de m intégrales particulières et de leurs $(m-1)$ premières dérivées, peut se calculer au moyen des coefficients. Sa valeur ne sera déterminée qu'à un facteur constant.

près. En effet, soit un autre système fondamental :

$$Y_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_m y_m$$

$$Y_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_m y_m$$

$$Y_m = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_m y_m$$

les m nouvelles intégrales particulières étant supposées distinctes, on doit avoir :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \end{vmatrix} \neq 0$$

et si l'on forme leur déterminant, on verra aisément que, en vertu de la règle de multiplication des déterminants, il est identique au produit des 2 déterminants D et Δ , c'est-à-dire de l'ancien déterminant par une constante non nulle. Les coefficients $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ étant arbitraires, cette constante Δ est elle-même arbitraire.

Puisque le déterminant D (abstraction faite du facteur constant arbitraire) est indépendant du système fondamental choisi, on doit pouvoir l'exprimer en fonction des coefficients. Appelons u cette fonction. On va démontrer que $\frac{du}{dx}$ est représentée par le même déterminant où l'on remplace, à la dernière ligne, les dérivées d'ordre $(m-1)$ par les dérivées d'ordre m.

Le théorème étant vrai, comme il est aisé de le vérifier, pour $m=1$, $m=2$

$$\left[\frac{d}{dx} |y| = \left| \frac{dy}{dx} \right| \right] \quad \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} & \frac{d^2 y_2}{dx^2} \end{vmatrix}$$

il suffira de le démontrer pour m, en le supposant vrai pour $(m-1)$.

En effet, supposons le déterminant u développé par rapport aux éléments de la dernière ligne; si l'on prend d'abord les dérivées de ces éléments, on obtient le déterminant annoncé. Si l'on prend ensuite la dérivée de chacun des mineurs, comme le théorème est supposé vrai pour eux, il faudra remplacer dans la dernière ligne de chacun d'eux les dérivées d'ordre $(m-2)$ par les dérivées d'ordre $(m-1)$, ce qui revient à rendre, dans le déterminant D , les éléments de la avant-dernière ligne égaux aux éléments correspondants de la dernière, le résultat sera donc nul. Il restera donc simplement:

$$\frac{du}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_m}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} & \frac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}} & \dots & \frac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}} \\ \frac{d^m y_1}{dx^m} & \frac{d^m y_2}{dx^m} & \dots & \frac{d^m y_m}{dx^m} \end{vmatrix}$$

Or on a, y_1, y_2, \dots, y_m étant des solutions de l'équation:

$$\frac{d^m y_i}{dx^m} = -p_1 \frac{d^{m-1} y_i}{dx^{m-1}} - p_2 \frac{d^{m-2} y_i}{dx^{m-2}} - \dots - p_{m-1} \frac{dy_i}{dx} - p_m y_i$$

et de même pour les autres. Si l'on substitue ces expressions dans le déterminant, tous les termes qui suivent le 1^{er} disparaissent comme proportionnels aux termes correspondants des autres lignes, il reste à la dernière ligne les éléments suivants:

$$-p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}, -p_1 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}}, \dots, -p_1 \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}}$$

Le facteur commun $-p_1$ multiplie tout le déterminant, on a donc:

$$\frac{du}{dx} = -p_1 u \quad \text{d'où:} \quad u = Ce^{-\int p_1 dx}$$

On voit que la valeur du déterminant D est bien connue, à un facteur constant près, en fonction du 1^{er} coefficient p_1 .

— Si le déterminant D est identiquement nul pour un certain système fondamental y_1, y_2, \dots, y_m , on a une relation de la forme:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m = 0$$

C_1, C_2, \dots, C_m étant des coefficients constants.

Supposons que le mineur qui contient y_1, y_2, \dots, y_{m-1} ne soit pas nul; on peut former une équation linéaire ayant ces $(m-1)$ intégrales pour système fondamental:

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_1 \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + p_{m-2} \frac{dy}{dx} + p_{m-1} y = 0$$

y_1, y_2, \dots, y_{m-1} en sont des solutions; mais y_m en est aussi une, donc y_m est une combinaison linéaire de y_1, y_2, \dots, y_{m-1} à coefficients constants, c. q. f. d.

— Nous allons maintenant donner une idée de la théorie de l'équation linéaire homogène conçue par Lagrange. Il met cette équation sous la forme:

$$I_1 y + M \frac{dy}{dx} + N \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots + S \frac{d^m y}{dx^m} = 0 \quad (1)$$

Il faut définir ce qu'il appelle l'équation adjointe de cette équation. Soit z une fonction de x ; multiplions l'équation par $z dx$ et intégrons; on a encore:

$$\int \left(I_1 z y + M z \frac{dy}{dx} + N z \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots + S z \frac{d^m y}{dx^m} \right) dx = 0$$

Intégrons par parties chaque terme de la parenthèse:

$$\int I_1 z y dx \quad \text{restera la même}$$

$$\int Mz \frac{dy}{dx} dx = Mxy - \int y \frac{d(Mz)}{dx} dx$$

$$\int Nz \frac{d^2y}{dx^2} dx = Nz \frac{dy}{dx} - y \frac{d(Nz)}{dx} + \int y \frac{d^2(Nz)}{dx^2} dx$$

$$\int Sz \frac{d^m y}{dx^m} dx = Sz \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} - \frac{d(Sz)}{dx} \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + \int y \frac{d^m(Sz)}{dx^m} dx$$

La partie non intégrée peut se réunir en une seule intégrale:

$$\int y \left[Iz - \frac{d(Mz)}{dx} + \frac{d^2(Nz)}{dx^2} - \dots + \frac{d^m(Sz)}{dx^m} \right] dx$$

La partie intégrée est une fonction linéaire de y et de ses $(m-1)$ premières dérivées. Choisissons z de façon à annuler la partie non intégrée, c'est le crochet qui figure dans l'intégrale précédente:

$$Iz - \frac{d(Mz)}{dx} + \frac{d^2(Nz)}{dx^2} - \dots + \frac{d^m(Sz)}{dx^m} = 0 \quad (2)$$

Cette nouvelle équation est l'équation adjointe à l'équation (1).

On voit que si l'on sait l'intégrer, on pourra intégrer la première.

En effet, la partie intégrée, égale à 0, formera une équation linéaire en $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$. En y substitués successivement

m solutions distinctes de l'équation (2) on z , on aura m

équations algébriques qui détermineront $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, puisque le déterminant de ces équations n'est pas nul.

On vérifie sans peine que l'équation (1) est, réciproquement, l'adjointe de l'équation (2.)

Jacobi présente la théorie sous une autre forme. Il considère

linéaires

un système de m équations du 1^{er} ordre à m fonctions inconnues:

$$(1) \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1m}y_m \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m \\ \dots \\ \frac{dy_m}{dx} = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mm}y_m \end{cases}$$

les coefficients a étant des fonctions de x .

Soit un 1^{er} système d'intégrales formant une solution du système (1):

un 1^{er}: $y_1^1 \quad y_2^1 \quad \dots \quad y_m^1$
 $y_1^2 \quad y_2^2 \quad \dots \quad y_m^2$

un m^e : $y_1^m \quad y_2^m \quad \dots \quad y_m^m$

Toute solution du système sera un ensemble d'intégrales de la forme:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_1^1 + C_2 y_2^1 + \dots + C_m y_m^1 \\ y_2 = C_1 y_1^2 + C_2 y_2^2 + \dots + C_m y_m^2 \\ \dots \\ y_m = C_1 y_1^m + C_2 y_2^m + \dots + C_m y_m^m \end{cases}$$

C'est la forme de la solution générale du système (1), pourvu que le déterminant des y ne soit pas identiquement nul, ce qu'on peut toujours obtenir, puisqu'on dispose arbitrairement des valeurs des intégrales particulières pour $x = x_0$.

Toute équation linéaire d'ordre m peut se mettre sous la forme d'un système de m équations linéaires du 1^{er} ordre en posant

$$(1) \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 & \frac{dy_2}{dx} = y_3 & \dots & \frac{dy_{m-1}}{dx} = y_m \\ \frac{dy_m}{dx} = p_1 y_m + p_2 y_{m-1} + \dots + p_m y_1 \end{cases}$$

ce qui équivaut évidemment à l'équation linéaire d'ordre m:

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y$$

Revenons au système général (1). Le système adjoint sera:

$$(2) \begin{cases} \frac{du_1}{dx} = -a_{11} u_1 - a_{12} u_2 - \dots - a_{m1} u_m \\ \frac{du_2}{dx} = -a_{21} u_1 - a_{22} u_2 - \dots - a_{m2} u_m \\ \dots \\ \frac{du_m}{dx} = -a_{m1} u_1 - a_{m2} u_2 - \dots - a_{mm} u_m \end{cases}$$

et réciproquement, le système (1) sera l'adjoint du système (2).

On a alors entre les y et les u la relation:

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_m y_m = C^{\frac{1}{2}}$$

Il suffit de calculer la dérivée du 1^{er} membre:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_m y_m) = \\ & u_1 (a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{m1} y_m) - y_1 (a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \dots + a_{m1} u_m) \\ & + u_2 (a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m) - y_2 (a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{m2} u_m) \\ & + \dots \\ & + u_m (a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \dots + a_{mm} y_m) - y_m (a_{m1} u_1 + a_{m2} u_2 + \dots + a_{mm} u_m) \end{aligned}$$

Toutes les termes du 2^e membre se détruisent deux à deux; la dérivée est donc nulle, ce qui démontre la relation annoncée.

Pour exprimer les u en fonction des y , il suffit de prendre m systèmes de y formant m solutions distinctes du système (1), et d'écrire les équations :

$$\begin{aligned} u_1 y_1' + u_2 y_2' + \dots + u_m y_m' &= C_1 \\ u_1 y_1^2 + u_2 y_2^2 + \dots + u_m y_m^2 &= C_2 \\ \dots &\dots \\ u_1 y_1^m + u_2 y_2^m + \dots + u_m y_m^m &= C_m \end{aligned}$$

Le déterminant de ces équations est différent de 0, les m solutions étant supposées distinctes ; donc on pourra les résoudre deux à deux et exprimer u_1, u_2, \dots, u_m en fonction des y .

Inversement, en prenant m systèmes de u on exprimerait les y en fonction des u .

Pour le système particulier (I) qui équivaut à l'équation linéaire, le système adjoint sera :

$$\frac{du_1}{dx} = -p_1 u_m \quad \frac{du_2}{dx} = -p_2 u_m \quad \dots \quad \frac{du_m}{dx} = -u_{m-1} - p_m u_m$$

L'équation qui donnera u_m et qu'on déduira de ce système sera l'équation adjointe de l'équation linéaire proposée (1).

Nous allons donner quelques exemples de l'intégration d'équations linéaires de forme particulière.

Euler a intégré les équations linéaires à coefficients constants.

Laplace a traité le problème plus général (dont le précédent n'est qu'un cas particulier) de l'équation linéaire dont les coefficients sont des binômes du n degré en x , c.à.d. de la forme suivante :

$$(a_0 x + b_0) \frac{d^m y}{dx^m} + (a_1 x + b_1) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + (a_m x + b_m) y = 0.$$

Laplace cherche une intégrale de la forme :

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} V(z) e^{zx} dz$$

Il faut choisir la fonction $V(z)$ et les 2 constantes α et β de façon que y soit une solution de l'équation. Or on a :

$$\frac{dy}{dx} = \int_{\alpha}^{\beta} z V e^{zx} dz \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_{\alpha}^{\beta} z^2 V e^{zx} dz \quad \dots \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \int_{\alpha}^{\beta} z^m V e^{zx} dz$$

On a aussi les produits : xy , $x \frac{dy}{dx}$, $x \frac{d^2 y}{dx^2}$, ... $x \frac{d^m y}{dx^m}$.

$$xy = \int_{\alpha}^{\beta} V x e^{zx} dz = \left[V e^{zx} \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dV}{dz} e^{zx} dz$$

$$x \frac{dy}{dx} = \left[V z e^{zx} \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d(Vz)}{dz} e^{zx} dz \quad \dots \quad$$

$$x \frac{d^m y}{dx^m} = \left[V z^m e^{zx} \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d(Vz^m)}{dz} e^{zx} dz$$

Supposons que les parties intégrées s'annulent, c'est à dire que :

$$\left[V z^i e^{zx} \right]_{\alpha}^{\beta} = 0 \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, m.$$

Réunissons les parties ^{non} intégrées en une seule intégrale : on aura :

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{zx} \left[-a_0 \frac{d(Vz^m)}{dz} + b_0 V z^m - a_1 \frac{d(Vz^{m-1})}{dz} + b_1 V z^{m-1} - \dots \right] dz = 0$$

pour nouvelle forme de l'équation. Elle sera vérifiée si l'on annule le crochet, ce qui donne une équation linéaire d'ordre en V :

$$V \cdot P(z) + \frac{dV}{dz} \cdot Q(z) = 0$$

P et Q étant des polynômes en z . On aura V par une quadrature:

$$\frac{dV}{V} = - \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \left[\mu + \frac{\lambda_1}{z-\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{z-\alpha_2} + \dots + \frac{\lambda_n}{z-\alpha_n} \right] dz$$

d'où: $V = e^{\mu z} (z-\alpha_1)^{\lambda_1} (z-\alpha_2)^{\lambda_2} \dots (z-\alpha_n)^{\lambda_n}$

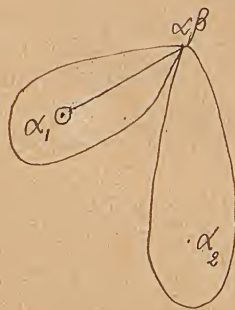
Il reste à déterminer quelles limites α et β il faut prendre, et quel chemin (dans le cas général où z est imaginaire) il faut suivre pour que: $\int_{\alpha}^{\beta} V e^{zx} dz$ ~~soit~~ ^{soit} une intégrale

~~et pour~~ ^{et} on ait en même temps: $\left[V z^i e^{zx} \right]_{\alpha}^{\beta} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, m.$

Marquons dans le plan des z les points critiques $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ de la fonction V . Prenons pour α et β un même point du plan, de sorte que le chemin suivi soit un contour fermé. Si le contour ne s'enferme aucun point critique, la valeur de V étant la même à l'arrivée qu'à l départ, la différence $\left[V z^i e^{zx} \right]_{\alpha}^{\beta}$ sera évidemment nulle. Décrivons

un circuit autour du point α_1 , et revenons en α , nous aurons une valeur de V différente de la valeur initiale; décrivons ensuite un autre circuit autour de α_2 , dans le même sens; on obtient une nouvelle valeur de V . Revenons en α ,

décrivons le 1^{er} circuit en sens inverse, puis le 2^e aussi en sens inverse: on retrouvera finalement la valeur initiale de V . En effet, ~~dans~~ ^{après} le 1^{er} circuit, le facteur $(z-\alpha_1)^{\lambda_1}$ se trouve multiplié par $e^{2\pi i \lambda_1}$;



67

après le 2e, le facteur $(z - \alpha_2)^{\lambda_2}$ est multiplié par $e^{2\pi i \lambda_2}$;
 en suivant le 1^{er} ~~fact~~^{circuit} ou sens contraire, on multiplie V par
 $e^{-2\pi i \lambda_1}$, puis, en suivant le 2e ~~fact~~^{circuit}, par $e^{-2\pi i \lambda_2}$; ces 4
 facteurs se détruisant deux à deux, la valeur finale et la valeur
 initiale de V sont identiques. On peut donc prendre pour contour
 d'intégration l'ensemble de ces ~~fact~~^{circuits} inverses l'un de l'autre.

Soit A_1 la valeur de l'intégrale prise sur le 1^{er} ~~fact~~^{circuit} (α_1) dans le
 sens positif ; A_2 la valeur de la même intégrale prise sur le 2e circuit
 dans le même sens, en supposant la valeur initiale identique (ou nulle).

En décrivant le 1^{er} ~~fact~~^{circuit} on obtient A_1 ; puis on décrit le 2e comme
 la valeur initiale et tous les éléments de l'intégrale se trouvent
 multipliés par $e^{2\pi i \lambda_1}$ après le 1^{er} circuit, on obtient :

$A_2 e^{2\pi i \lambda_1}$. Après le 2e circuit, la valeur initiale se trouve
 multipliée par : $e^{2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)}$ et comme on décrit le 1^{er} circuit
 dans le sens négatif, il donne : $-A_1 e^{2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)}$

Après le 3e circuit, la valeur initiale est multipliée par :

$e^{2\pi i \lambda_1} \cdot e^{2\pi i \lambda_2} \cdot e^{-2\pi i \lambda_1} = e^{2\pi i \lambda_2}$ et le 2e circuit, décrit
 dans le sens négatif, donne : $-A_2 e^{2\pi i \lambda_2}$

L'intégrale prise sur le contour total est la somme :

$$A_1 (1 - e^{2\pi i (\lambda_1 + \lambda_2)}) + A_2 (e^{2\pi i \lambda_1} - e^{2\pi i \lambda_2})$$

Supposons que pour $z = \alpha_1$ l'intégrale ait un sens ; on pourra
 remplacer le 1^{er} circuit par le lacet $\alpha \alpha_1$; ce lacet se compose
 de $\alpha \alpha_1$, d'un arc infiniment petit autour de α_1 , et de $\alpha_1 \alpha$

L'intégrale prise sur le cercle est nulle, mais la valeur de V , après la rotation de 2π autour de α_1 , se trouve multipliée par :

$e^{2\pi i \lambda}$; soit $(\alpha \alpha_1)$ la valeur de l'intégrale prise de α à α_1 ; comme elle est prise en sens inverse au retour, elle devient négative, et l'on a finalement :

$$A_1 = (\alpha \alpha_1) (1 - e^{2\pi i \lambda})$$

- En combinant de même le circuit α_1 avec les circuits $\alpha_2, \dots, \alpha_m$, on obtiendrait $(m-1)$ autres solutions distinctes de l'équation, et on n'en aurait pas davantage, car toute autre combinaison de circuits équivaudrait à une somme ou à une différence des résultats déjà obtenus. L'équation admet donc $(m-1)$ intégrales holomorphes; elle sera alors résolue, car on pourra trouver son intégrale générale par des quadratures (en admettant que les $(m-1)$ solutions soient distinctes.)

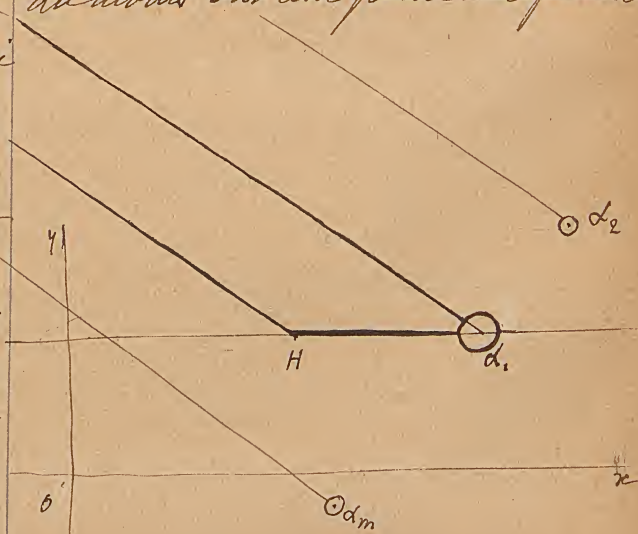
Une autre méthode va nous permettre de trouver m intégrales non holomorphes de la même équation.

Supposons, pour simplifier la question, que μ est réel, et que les exposants λ sont positifs ou du moins ont leur partie réelle positive.

Preuons le point α, β à l'infini du côté des x négatifs, et décrivons un chemin d'intégration

fermé n'enveloppant qu'un seul point critique, α , par exemple.

Ce circuit équivaut au lacet (∞, α) c.à.d. à un droit double allant de α à l'infini.



69

Il faut savoir si l'intégrale prise jusqu'à $z = -\infty$ a un sens.
 Supposons κ réel et positif, et assez grand pour que l'on ait:

$$\kappa + \mu = \xi > 0. \quad \kappa \text{ pourra devenir infini positif}$$

On aura:
$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{z(\kappa + \mu)} (z - \alpha_1)^{\lambda_1} (z - \alpha_2)^{\lambda_2} \dots (z - \alpha_m)^{\lambda_m} dz$$

α et β étant infinis négatifs. Or: $\int_{\alpha}^{\beta} e^{z(\kappa + \mu)} dz$
 a un sens pour $\kappa = -\infty$. D'autre part:

$V z^i e^{z\kappa} = 0$ pour $\kappa = -\infty$, car z disparaît en
 présence du exponentielles infiniment petites: La condition:
 $[V z^i e^{z\kappa}]_{\alpha}^{\beta} = 0$ sera donc toujours remplie.

L'intégrale prise suivant le lacet infini a donc un sens.

On aura ainsi une intégrale pour chaque point critique. Mais
 ce ne seront pas des fonctions holomorphes de κ ; leur valeur dépendra
 de la nature des valeurs attribuées à κ . Ces m intégrales peuvent
 servir à construire l'intégrale générale, car on va prouver qu'elles
 sont linéairement indépendantes.

Appelons I_1, I_2, \dots, I_m les m intégrales relatives aux m lacets $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Considérons $I_1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{\xi z} (z - \alpha_1)^{\lambda_1} (z - \alpha_2)^{\lambda_2} \dots (z - \alpha_m)^{\lambda_m} dz$

intégrale prise suivant le lacet α_1 . Cherchons ce qu'il devient cette
 intégrale quand κ , c'est-à-dire ξ , croît indéfiniment.

Menons par le point α_1 une parallèle à Ox , et prenons α_1 pour nouvelle
 origine en faisant le changement de variable: $z - \alpha_1 = z'$.

Les $(m-1)$ autres facteurs binômes de V forment par leur produit un polynôme de degré $(m-1)$ en z' , c'est une fonction holomorphe $P(z')$:
 (au voisinage de $z'=0$)

$$I_1 = e^{\xi\alpha_1} \int e^{\xi z'} z'^{\lambda_1} P(z') dz'$$

Menons une parallèle au lacet α_1 terminée à α, x' en H , et formons le nouveau lacet: $\infty H \alpha_1$; posons: $\alpha_1 H = -a$.

Quand x augmente indéfiniment, l'intégrale prise sur la demi droite infinie ∞H tend vers 0. Pour connaître la valeur de I_1 pour $x = \infty$, il suffit de trouver la limite, pour $x = \infty$, de l'intégrale obtenue en décrivant le lacet fini: $H \alpha_1$, c'est:

$$\lim_{x=\infty} \left[e^{\xi\alpha_1} (1 - e^{2\pi i \lambda_1}) \int_{-a}^0 e^{\xi z'} z'^{\lambda_1} P(z') dz' \right] = \lim J_1 = I_1$$

Posons: $\xi z' = -z''$; les limites seront: ξa et 0.

$$e^{-\xi\alpha_1} J_1 = e^{\pi i \lambda_1} \int_{\xi a}^0 e^{-z''} \frac{z''^{\lambda_1}}{\xi^{\lambda_1+1}} P\left(\frac{z''}{\xi}\right) dz''$$

Soit A le terme indépendant de P ; faisons croître x ^{ou ξ} indéfiniment:

$$\lim_{x=\infty} \xi^{\lambda_1+1} e^{-\xi\alpha_1} J_1 = e^{\pi i \lambda_1} \int_0^\infty e^{-z''} z''^{\lambda_1} A dz'' = -A e^{\pi i \lambda_1} \Gamma(\lambda_1+1)$$

Or $\Gamma(\lambda_1+1)$ est une quantité finie non nulle; donc on a ce résultat général:

$$\lim_{x=\infty} \xi^{\lambda_1+1} e^{-\xi\alpha_1} J_1 = B, \neq 0.$$

Cela établi, nous allons prouver que les m intégrales I_1, I_2, \dots, I_m

sont linéairement indépendantes, c'est qu'il ne peut exister une relation de la forme: $P_1 I_1 + P_2 I_2 + \dots + P_m I_m = 0$.

Supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ soient rangés dans l'ordre de leurs parties réelles décroissantes. Multiplions la relation hypothétique qui précède par: $\xi^{\lambda_1+1} e^{-\xi \alpha_1}$ et faisons tendre ξ vers ∞ .

Le 1^{er} terme, $P_1 I_1$, tendra vers $P_1 B_1$. Les autres s'annuleront, car on a: $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^{\lambda_2+1} e^{-\xi \alpha_2} J_2 = B_2$

Multiplions le 2nd membre par: $\xi^{\lambda_1-\lambda_2} e^{\xi(\alpha_2-\alpha_1)}$

On aura: $\xi^{\lambda_1+1} e^{-\xi \alpha_1} I_2 = B_2 \xi^{\lambda_1-\lambda_2} e^{\xi(\alpha_2-\alpha_1)}$

Or $\alpha_2 - \alpha_1 < 0$ au moins par sa partie réelle; donc $e^{\xi(\alpha_2-\alpha_1)}$ est infiniment petit, et l'on porte sur $\xi^{\lambda_1-\lambda_2}$, on aura en général: $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^{\lambda_1+1} e^{-\xi \alpha_1} I_i = 0 \quad i=2, 3, \dots, m$

Arrete l'égalité: $P_1 B_1 = 0$ Or $B_1 \neq 0$ Donc: $P_1 = 0$.

On prouverait de même: $P_2 = 0 \dots \dots \dots P_m = 0$, ce qui signifie que la relation supposée n'existe pas.

Appliquons la méthode précédente au cas très particulier de l'équation linéaire à coefficients constants:

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

Il faut chercher une intégrale de la forme: $y = \int_a^b V e^{\pi x} dx$ dont les dérivées sont:

$$\frac{dy}{dx} = \int_a^b V \pi e^{\pi x} dx \quad \dots \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \int_a^b V \pi^n e^{\pi x} dx$$

Substituons ces expressions dans l'équation linéaire; elle deviendra

$$\int_{\alpha}^{\beta} V f(z) e^{zx} dz = 0 \quad \text{en posant: } f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

Preons un contour fermé allant de α en β , les 2 points étant confondus. Si V est holomorphe à l'intérieur de ce contour, l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} V e^{zx} dz$$

sera nulle.

(Posons: $V f(z) = \varphi(z)$ d'où: $V = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$.)

Si au contraire le contour contient des points critiques de V , c'est-à-dire des racines de $f(z)$, l'intégrale prendra une certaine valeur.

Soit α_1 une racine multiple de degré p de $f(z)$: $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ peut se développer au voisinage du pôle α_1 en une série de la forme:

$$\frac{A_1}{(z-\alpha_1)^p} + \frac{A_2}{(z-\alpha_1)^{p-1}} + \dots + \frac{A_p}{z-\alpha_1} + \dots$$

D'autre part, on peut développer e^{zx} comme suit:

$$e^{zx} = e^{(\alpha_1 + x)z} = e^{\alpha_1 z} \left[1 + (z-\alpha_1)x + \dots + \frac{(z-\alpha_1)^p x^p}{p!} + \dots \right]$$

Le résidu de $\frac{\varphi(z)}{f(z)} e^{zx}$ relatif au pôle α_1 est le coefficient déterminé en $\frac{1}{z-\alpha_1}$ dans le développement: c'est le produit de $e^{\alpha_1 x}$ et d'un polynôme de degré $(p-1)$ en x , de la forme:

$$e^{\alpha_1 x} (C_1 x^{p-1} + C_2 x^{p-2} + \dots + C_{p-1} x + C_p)$$

Elle est l'intégrale qui correspond à chaque racine, p étant son degré de multiplicité: elle contient p constantes arbitraires.

On peut se demander si l'on obtient ainsi l'intégrale générale de l'équation différentielle, ~~soit~~ quand on prend pour $Q(z)$ un polynôme arbitraire de degré $(n-1)$, et pour contour d'intégration une courbe fermée enveloppant toutes les racines de $f(z)$.

Cela est évident que si les n racines sont distinctes, c'est-à-dire si $f(z)$ n'a que des racines simples. Mais on peut le démontrer pour le cas général de la manière suivante:

Preons pour contour d'intégration C un cercle de centre O et d'un rayon assez grand pour enfermer toutes les racines de $f(z)$. On pourra développer V à l'intérieur de ce cercle sous la forme:

$$\frac{Q(z)}{f(z)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_n}{z^n}$$

Si $Q(z)$ est donné arbitrairement, les A sont déterminés; si au contraire les A sont arbitraires, on connaîtra les coefficients de $Q(z)$ par des équations successives du 1^{er} degré, toutes résolubles.

On aura, pour $x=0$, les valeurs suivantes:

$$y = \int \frac{Q(z)}{f(z)} dz \quad \frac{dy}{dx} = \int z \frac{Q(z)}{f(z)} dz \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int z^{n-1} \frac{Q(z)}{f(z)} dz$$

Dans y , la terme en $\frac{1}{z}$ a pour coefficient A_1 , donc en intégrant, on aura la valeur $2\pi i \cdot A_1$. En intégrant $z \frac{Q(z)}{f(z)}$ dont le résidu est A_2 , on aura pour $\frac{dy}{dx}$ la valeur $2\pi i \cdot A_2$, et ainsi de suite; on obtient pour $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ la valeur $2\pi i \cdot A_n$.

On a ainsi le système fondamental de l'équation proposée, et par suite son intégrale générale.

Ce résultat peut se généraliser, et s'applique à un système d'équations linéaires du 1^{er} ordre à coefficients constants :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n \end{cases}$$

Choisissons n intégrales de la forme :

$$y_1 = \int V_1 e^{zx} dx \quad y_2 = \int V_2 e^{zx} dx \quad \dots \quad y_n = \int V_n e^{zx} dx$$

V_1, V_2, \dots, V_n étant des fonctions de x , et les intégrales étant prises suivant la même contour. Les équations du système deviendront :

$$\int_c [(a_{11} - z) V_1 + a_{12} V_2 + \dots + a_{1n} V_n] e^{zx} dx = 0$$

$$\int_c [a_{21} V_1 + (a_{22} - z) V_2 + \dots + a_{2n} V_n] e^{zx} dx = 0$$

$$\int_c [a_{n1} V_1 + a_{n2} V_2 + \dots + (a_{nn} - z) V_n] e^{zx} dx = 0$$

On posera ensuite les équations suivantes :

$$(a_{11} - z) V_1 + a_{12} V_2 + \dots + a_{1n} V_n = P_1(z)$$

$$a_{21} V_1 + (a_{22} - z) V_2 + \dots + a_{2n} V_n = P_2(z)$$

$$a_{n1} V_1 + a_{n2} V_2 + \dots + (a_{nn} - z) V_n = P_n(z)$$

P_1, P_2, \dots, P_n étant des polynômes en z . On pourra prendre

tous nuls sauf P_i ; on aura V_1, V_2, \dots, V_n en résolvant les équations précédentes :

$$V_1 = \frac{\Psi_1(z)}{f(z)} P_1(z) \quad V_2 = \frac{\Psi_2(z)}{f(z)} P_1(z) \quad \dots \quad V_n = \frac{\Psi_n(z)}{f(z)} P_1(z)$$

$f(z)$ étant le déterminant des équations, c'est un polynôme de degré n en z . Ce sont les racines du polynôme $P_1(z)$ qui joueront le rôle essentiel dans l'intégrale générale du système.

On pourra choisir les coefficients de telle façon que pour $x=0$, y_1, y_2, \dots, y_n prennent des valeurs assignées d'avance.

— Considérons en particulier, avec Jacobi, un système de 3 équations linéaires du 1^{er} ordre à coefficients constants :

$$\frac{du}{dt} = au + bv + cw$$

$$\frac{dv}{dt} = a'u + b'v + c'w$$

$$\frac{dw}{dt} = a''u + b''v + c''w$$

En les intégrant dans le cas le plus général, on trouve 3 solutions distinctes :

$$\begin{cases} u = \lambda_1 e^{\alpha_1 t} \\ v = \mu_1 e^{\alpha_1 t} \\ w = \nu_1 e^{\alpha_1 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \lambda_2 e^{\alpha_2 t} \\ v = \mu_2 e^{\alpha_2 t} \\ w = \nu_2 e^{\alpha_2 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \lambda_3 e^{\alpha_3 t} \\ v = \mu_3 e^{\alpha_3 t} \\ w = \nu_3 e^{\alpha_3 t} \end{cases}$$

L'intégrale générale du système proposé sera donc :

$$\begin{cases} u = A_1 \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\alpha_2 t} + A_3 \lambda_3 e^{\alpha_3 t} \\ v = A_1 \mu_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 \mu_2 e^{\alpha_2 t} + A_3 \mu_3 e^{\alpha_3 t} \\ w = A_1 \nu_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 \nu_2 e^{\alpha_2 t} + A_3 \nu_3 e^{\alpha_3 t} \end{cases}$$

Poseons : $x = \frac{u}{W}$, $y = \frac{v}{W}$

Si l'on substitue dans ces formules les valeurs de u, v, W , on aura x et y sous la forme de fractions dont les termes seront des polynômes du 1^{er} degré en : $\frac{A_2}{A_1} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t}$, $\frac{A_3}{A_1} e^{(\alpha_3 - \alpha_1)t}$

Si l'on résout alors ces 2 équations par rapport à ces 2 quantités, on aura leur expression en fractions linéaires en x, y :

$$\frac{A_2}{A_1} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} = \frac{Mx + Ny + P}{M''x + N''y + P''} \quad \frac{A_3}{A_1} e^{(\alpha_3 - \alpha_1)t} = \frac{M'x + N'y + P'}{M''x + N''y + P''}$$

Pour obtenir une relation entre x et y , on éliminera les exponentielles par une élévation aux puissances et on trouvera :

$$\left(\frac{Mx + Ny + P}{M''x + N''y + P''} \right)^{\alpha_3 - \alpha_1} \cdot \left(\frac{M'x + N'y + P'}{M''x + N''y + P''} \right)^{\alpha_2 - \alpha_1} = C \frac{t_2}{t_1}$$

$$\text{ou : } (Mx + Ny + P)^{\alpha_3 - \alpha_1} \cdot (M'x + N'y + P')^{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot (M''x + N''y + P'')^{\alpha_2 - \alpha_3} = C \frac{t_2}{t_1}$$

Puisque cette relation entre x et y ne dépend que d'une constante, elle est l'intégrale générale d'une équation différentielle du 1^{er} ordre :

$$dx = \frac{wdu - udw}{w^2} \quad dy = \frac{wdv - vdw}{w^2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{wdv - vdw}{wdu - udw}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(a'u + b'v + c'w) - v(a''u + b''v + c''w)}{w(au + bv + cw) - u(a''u + b''v + c''w)} \quad \text{ou :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a'x + b'y + c' - y(a''x + b''y + c'')}{ax + by + c - x(a''x + b''y + c'')}$$

équation du 1^{er} ordre qui contient un terme en dx , un terme en dy , et un terme en $(x dy - y dx)$:

$$(a'x+by+c)dx + (ax+by+c)dy + (a''x+b''y+c'')(xdy-ydx) = 0.$$

dont l'intégrale générale a la forme précédemment trouvée.

Pour avoir $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, on devra résoudre l'équation caractéristique de cette équation différentielle, qui est du 3^e ordre en α :

$$\begin{vmatrix} a-\alpha & b & c \\ a' & b'-\alpha & c' \\ a'' & b'' & c''-\alpha \end{vmatrix} = 0$$

On a ainsi transformé un système de 3 équations à 3 fonctions inconnues en une équation d'ordre ^{linéaire} (équation de Jacobi.)

Avant d'aborder l'étude de l'équation linéaire hypergénométrique, définissons ce qu'on entend par groupe d'une équation linéaire.

Soit une équation linéaire à coefficients quelconques; supposons que l'on ait réduit à 1 celui du 1^{er} terme. On sait que les points singuliers des intégrales sont déterminés et finis dans le plan, parce qu'il y a des points singuliers des coefficients. Considérons dans le plan un point x qui ne soit pas point singulier des coefficients. Soit y_1, y_2, \dots, y_n un système fondamental d'intégrales relatives à ce point. Si l'on part de x et qu'on y revienne après avoir fait un tour autour du point critique α_1 , on aura d'autres intégrales Y_1, Y_2, \dots, Y_n formant un autre système fondamental. Ces seront des combinaisons linéaires à coefficients constants des premières.

$$S_1 \begin{cases} Y_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\ Y_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n \\ \dots \\ Y_n = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n \end{cases}$$

L'ensemble de corrélations constitue une substitution linéaire; on aura ainsi, en partant du même système fondamental y_1, y_2, \dots, y_n , une substitution linéaire pour chaque point critique autour duquel on décrit un circuit fermé; soient: S_1, S_2, \dots, S_p

les substitutions correspondant aux points critiques: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$.

On appelle groupe de liqvation proposé l'ensemble des substitutions qui correspondent à tous les points critiques.

Il est aisé de voir qu'il n'y a qu'un groupe auquel se ramènent tous les autres; car si l'on prenait au point de départ un autre système fondamental:

$$y'_1, y'_2, \dots, y'_n$$

on pourrait l'écrire le premier:

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

par une simple substitution linéaire, de sorte que les nouvelles substitutions relatives aux divers points critiques se déduiraient des anciennes par une même substitution linéaire, qui est celle par laquelle on passe d'un système fondamental à l'autre. Le groupe est donc unique, à la condition de lui ajouter une substitution linéaire arbitraire.

Comme tout chemin décrit dans le plan par un point variable se ramène à un certain nombre de circuits effectués autour des divers points critiques dans un certain ordre, on pourra déduire le système fondamental final du système fondamental initial en effectuant sur celui-ci les substitutions correspondantes dans le même ordre. — Donc, connaissant les p substitutions du groupe, on pourra obtenir tous les systèmes fondamentaux et toutes les intégrales particuliers de l'équation proposée.

Considérons l'intégrale : $\int_a^b (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} (u-x)^{\lambda-1} du$
 Les limites a, b étant en
 des 3 quantités : a_1, a_2, ∞ .

Pour que cette intégrale ait un sens, il faut que b_1, b_2 soient positifs, au moins par leur partie réelle ; et que l'on ait :

$$3 - (\lambda + b_1 + b_2) > 1 \quad \text{ou : } \lambda + b_1 + b_2 < 2.$$

Cette intégrale définit 2 fonctions distinctes de x ; car la 3^e est égale à la somme ou la différence des 2 autres ; par exemple :

$$\int_{a_1}^{a_2} = \int_{a_1}^{\infty} - \int_{a_2}^{\infty}$$

Posons :

$$y = \int_a^b V(u-x)^{\lambda-1} du$$

$$V = (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -(\lambda-1) \int_a^b V(u-x)^{\lambda-2} du$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\lambda-1)(\lambda-2) \int_a^b V(u-x)^{\lambda-3} du$$

Considérons la fonction : $\phi(u) = (u-a_1)^{b_1} (u-a_2)^{b_2} (u-x)^{\lambda-2}$
 qui s'annule pour : $u = a_1, u = a_2, u = \infty$.

Différencions-la par rapport à u :

$$d\phi = \left[b_1 (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2} (u-x)^{\lambda-2} + b_2 (u-a_1)^{b_1} (u-a_2)^{b_2-1} (u-x)^{\lambda-2} + (\lambda-2) (u-a_1)^{b_1} (u-a_2)^{b_2} (u-x)^{\lambda-3} \right] du$$

ou :

$$\phi(u) du = U \left[b_1 (u-a_2) (u-x)^{\lambda-2} + b_2 (u-a_1) (u-x)^{\lambda-2} + (\lambda-2) (u-a_1) (u-a_2) (u-x)^{\lambda-3} \right] du$$

Poseons: $f(u) = (u - \alpha_1)(u - \alpha_2)$ $g(u) = b_1(u - \alpha_1) + b_2(u - \alpha_2)$

$$\varphi'(u) du = V(u-x)^{\lambda-2} g(u) du + (\lambda-2) V(u-x)^{\lambda-3} f(u) du$$

On peut d'abord appeler $g(u)$, qui est du 1^{er} degré, et $f(u)$, qui est du 2^{e} , suivant les puissances de $(u-x)$ par la série de Taylor:

$$g(u) = g(x) + (u-x)g'(x)$$

$$f(u) = f(x) + (u-x)f'(x) + \frac{(u-x)^2}{2} f''(x)$$

On aura donc, en ordonnant par rapport à $(u-x)$:

$$\varphi'(u) du = V \left[(u-x)^{\lambda-2} g(x) + (u-x)^{\lambda-1} g'(x) + (\lambda-2)(u-x)^{\lambda-3} f(x) \right. \\ \left. + (\lambda-2)(u-x)^{\lambda-2} f'(x) + \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{2} (u-x)^{\lambda-1} f''(x) \right] du$$

Intégrons, en regardant $f(x)$, $g(x)$ et leurs dérivées comme des constantes; on aura un terme en $V(u-x)^{\lambda-3}$ qui donnera $\frac{dy}{dx^{\lambda-2}}$, un terme en $V(u-x)^{\lambda-2}$ qui donnera $\frac{dy}{dx^{\lambda-1}}$, enfin un terme en $V(u-x)^{\lambda-1}$ qui donnera y ; on aura l'équation linéaire:

$$f(x) \frac{d^2 y}{dx^2} - [(\lambda-2)f'(x) + g(x)] \frac{dy}{dx} + (\lambda-1) \left[\frac{(\lambda-2)}{2} f''(x) + g'(x) \right] y = 0$$

dont le 1^{er} coefficient est du 2^{e} degré, le 2^{e} du 1^{er} degré, et le 3^{e} est une constante. Telle est l'équation différentielle qui vérifie les intégrales proposées.

Cette équation du 2^{e} ordre, qui a été d'abord étudiée par Euler, a été mise sous une forme un peu différente par Gauss, en y faisant

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1 \quad \lambda = 1 - \alpha \quad b_1 = 1 + \alpha - \gamma \quad b_2 = \gamma - \beta$$

Elle devient: $x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$

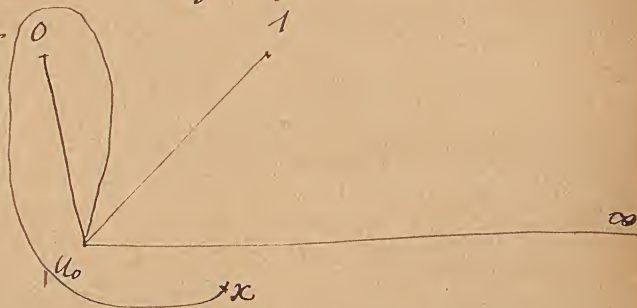
L'intégrale devient, avec cette nouvelle notation :

$$y = \int_a^b u^2 (u-1)^2 (u-x)^2 du$$

a et b prenant une des 3 valeurs : 0, 1, ∞ .

On va montrer qu'elles peuvent aussi prendre la valeur x , c'est-à-dire que si x ~~est~~ ^{est} une des limites de l'intégrale précédente, et qu'elle vérifie encore la même équation différentielle. Cela n'est pas évident a priori, car en différentiant y il faudrait tenir compte de la limite variable x .

Marquons dans le plan les points critiques : 0, 1, et le point à l'infini dans une certaine direction ; joignons u_0 à ces 3 points.



Nous traçons ainsi 3 courbes, dont une infinie, et on astreint le point u à ne pas les traverser.

Par exemple, pour aller de u_0 en x , il faudra suivre un chemin tel que celui qu'indique la figure, compris dans l'angle $0 u_0 1$.

Sous ces conditions, si l'on se donne la valeur de l'élément différentiel en u_0 , les 3 intégrales définies :

$$V_0 = \int_{u_0}^0 \quad V_1 = \int_{u_0}^1 \quad V_x = \int_{u_0}^x \quad V_\infty = \int_{u_0}^\infty$$

seront bien déterminées. Les intégrales représentées par y le seront aussi, car ce sont des différences des précédentes :

$$\int_0^1 = V_0 - V_1 \quad \int_0^\infty = V_0 - V_\infty \quad \int_1^\infty = V_1 - V_\infty$$

Ainsi les différences: $V_0 - V_1$, $V_0 - V_\infty$, $V_1 - V_\infty$
sont des solutions de l'équation différentielle. On va prouver
que les différences: $V_x - V_1 = \int_x^1$ $V_x - V_\infty = \int_x^\infty$ $V_1 - V_x = \int_0^x$
sont aussi des solutions de la même équation.

Pour cela, prenons l'intégrale suivant les 4 arcs 0, 1, x et ∞ ;
on forme ainsi un circuit fermé; le résultat devra être nul.

Sur l'arc (0, 0) on a, en allant:

V_0 , et en revenant, $-V_0 e^{2\pi i}$
car quand on tourne de 2π autour
de 0, u^a est multiplié par $e^{2\pi i}$;
le résultat est donc pour le 1^{er} arc:

$$V_0 (1 - e^{2\pi i})$$

Sur l'arc (0, x), on part avec la détermination initiale multipliée
par $e^{2\pi i}$, et $(u-x)^1$ se trouve multiplié par $e^{2\pi i}$ quand
on tourne autour de x ; le résultat est donc pour le 2^e arc:

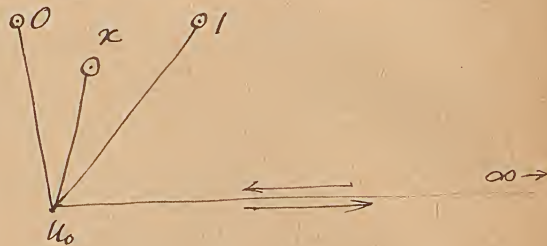
$$e^{2\pi i} V_x (1 - e^{2\pi i})$$

Sur l'arc (0, 1) la détermination initiale est multipliée par
 $e^{2(a+1)\pi i}$, et au retour elle est multipliée par $e^{2b\pi i}$; donc:

$$e^{2(a+1)\pi i} V_1 (1 - e^{2b\pi i})$$

Enfin sur l'arc (0, ∞) on part avec le facteur: $e^{2(a+b+1)\pi i}$,
et on revient avec le facteur: $e^{-2(a+b+1)\pi i}$

car pour faire le tour du point à l'infini, on décrit un arc de
centre u_0 et de rayon très grand dans le sens négatif, on revient



sur l'autre côté de la coupure avec ~~la même valeur changée de signe.~~
 Résultat:
$$e^{2(a+b+\lambda)\pi i} U_{\infty} (1 - e^{-2(a+b+\lambda)\pi i})$$

Puisque la somme de ces 4 intégrales est nulle, on a une relation linéaire à coefficients constants entre U_0, U_1, U_{∞} et U_x , c'est entre les 3 différences: $U_0 - U_1, U_0 - U_{\infty}$ et $U_0 - U_x$. Les 2 premières étant des solutions de l'équation différentielle, la dernière en est aussi une, c. q. f. d. Ainsi la différence de 2 quelconques des 4 intégrales: $U_0, U_1, U_x, U_{\infty}$ satisfait l'équation différentielle, ce qui revient à dire que les limites q et b de l'intégrale y peuvent être: 0, 1, x ou ∞ .

Cherchons maintenant le groupe de l'équation différentielle: on a la relation linéaire entre $U_0, U_1, U_x, U_{\infty}$:

$$(1 - e^{2\pi i})U_0 + (e^{2\pi i} - e^{2(a+b+\lambda)\pi i})U_x + (e^{2(a+b+\lambda)\pi i} - e^{2(a+b+\lambda)\pi i})U_1 + (e^{2(a+b+\lambda)\pi i} - 1)U_{\infty} = 0.$$

Renouveler les 2 différences: $\omega_1 = U_x - U_0$ $\omega_2 = U_x - U_1$ qui sont des intégrales de l'équation; elles ont des valeurs bien déterminées sous les conditions définies plus haut.

Cherchons la substitution qui correspond à une rotation de 360° autour du point 0 dans le sens négatif. Le point x , supposé sur le bord gauche du lacet $(u_0, 0)$ reviendra au même point sur le bord droit par une rotation de -2π . Les intégrales auront alors de nouvelles valeurs $U'_0, U'_x, U'_1, U'_{\infty}$, et on aura les nouvelles différences: $\omega'_1 = U'_x - U'_0$ $\omega'_2 = U'_x - U'_1$ qui seront encore des intégrales de l'équation; elles devront donc s'exprimer linéairement en fonction de ω_1, ω_2 , et ces relations

linéaires représenteront la substitution d'un système fondamental à l'autre. Or on a évidemment $V_1 = V'_1$ $V_\infty = V'_\infty$.

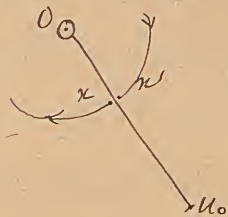
Ecrivons l'identité :

$$V_0 = V_x + (V_0 - V_x)$$

Pour calculer V'_0 , allons d'abord jusqu'en x sur le lacet $(u_0, 0)$;

on obtient comme auparavant V_x .

Il faut ajouter l'intégrale $\int_0^x V'_0 - V'_x$.



Or x ayant tourné de $-\pi$ autour de 0, le facteur $(u-x)^{\lambda}$ a été multiplié par $e^{-2\lambda\pi i}$; donc tous les éléments de l'intégrale sont multipliés par ce facteur, et :

$$V'_0 - V'_x = e^{-2\lambda\pi i} (V_0 - V_x)$$

On a donc :

$$V'_0 = V_x + e^{-2\lambda\pi i} (V_0 - V_x)$$

On a ainsi V'_0 en fonction des anciennes intégrales V_0, V_x .

On aura par suite V'_x en fonction de V_x et V_0 , puisque la même relation existe entre les V' qu'entre les V , d'après l'alg. que 2 quantités distinctes parmi les 4 : V_0, V_x, V_1, V_∞ . On aura donc tous les V' en fonction des V , et par conséquent ω'_1, ω'_2 en fonction de ω_1, ω_2 .

En retranchant membre à membre les 2 relations linéaires semblables, V_1 et V_∞, V'_1 et V'_∞ disparaissent, et il reste :

$$(V'_0 - V_0)(1 - e^{2\lambda\pi i}) + (V'_x - V_x)e^{2\lambda\pi i}(1 - e^{-2\lambda\pi i}) = 0$$

$$\text{Calculons: } \omega'_1 = V'_x - V'_0 = (V'_x - V_x) + (V_x - V'_0)$$

$$\text{D'après la relation précédente: } V'_x - V_x = \frac{1 - e^{-2\lambda\pi i}}{1 - e^{2\lambda\pi i}} (V'_0 - V_0)$$

$$\text{Or: } V'_0 - V_0 = (V'_0 - V_x) + (V_x - V'_0)$$

D'après une relation antérieure: $V'_0 - V_x = -\omega_1 e^{-2\lambda\pi i}$

Donc: $V'_x - V_x = -\omega_1 e^{-2\lambda\pi i} (1 - e^{-2\lambda\pi i})$

Il vient: $\omega'_1 = -\omega_1 e^{-2\lambda\pi i} (1 - e^{-2\lambda\pi i}) + \omega_1 e^{-2\lambda\pi i} = \omega_1 e^{-2(a+\lambda)\pi i}$

Calculons: $\omega'_2 = V'_x - V'_1 = V_x - V_1 = (V_x - V_1) + (V'_x - V_x)$

$\omega'_2 = \omega_2 - \omega_1 e^{-2\lambda\pi i} (1 - e^{-2\lambda\pi i}) = \omega_2 + \omega_1 [e^{-2(a+\lambda)\pi i} - e^{-2\lambda\pi i}]$

On a ainsi la 1^{re} substitution fondamentale du groupe:

$$S_1 \begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 e^{-2(a+\lambda)\pi i} \\ \omega'_2 = \omega_2 + \omega_1 [e^{-2(a+\lambda)\pi i} - e^{-2\lambda\pi i}] \end{cases}$$

qui correspond à une rotation de -2π autour du point critique 0.

— Effectuons maintenant une rotation de $+2\pi$ autour du 2^e point critique 1; on aura les nouvelles valeurs du intégrale:

$V''_0, V''_x, V''_1, V''_\infty$ qu'on exprimera au moyen des anciennes valeurs:

$$V''_0 \quad V''_x \quad V''_1 \quad V''_\infty$$

On a d'abord, évidemment: $V''_0 = V_0 \quad V''_\infty = V_\infty$

Posons: $V_1 = V_x + (V_1 - V_x)$

on trouve, par le même raisonnement que ci-dessus:

$$V''_1 = V_x + e^{2\lambda\pi i} (V_1 - V_x)$$

D'autre part, on a la relation:

$$(V''_x - V_x)(e^{2\lambda\pi i} - e^{2(a+\lambda)\pi i}) + (V''_1 - V_1)(e^{2(a+\lambda)\pi i} - e^{2(a+\lambda+1)\pi i}) = 0$$

ou: $(V''_x - V_x)(1 - e^{2\lambda\pi i}) + (V''_1 - V_1)e^{2\lambda\pi i}(1 - e^{2\pi i}) = 0$

En calculant au moyen de ces relations: $\omega_1'' = U_x'' - U_0''$
 on trouve la 2^e substitution: $\omega_2'' = U_x'' - U_1''$

$$S_2 \begin{cases} \omega_1'' = \omega_1 + \omega_2 \left[e^{2(b+\lambda)\pi i} - e^{2\lambda\pi i} \right] \\ \omega_2'' = \omega_2 e^{2(b+\lambda)\pi i} \end{cases}$$

Telles sont les 2 substitutions fondamentales S_1, S_2 du groupe qui, une fois connus, donnent toutes les déterminations possibles des intégrales de l'équation hypergéométrique.

Cas particulier, s'appliquant aux intégrales elliptiques.

Faisons: $a = b = \lambda = -\frac{1}{2}$: L'intégrale prend la forme:

$$\int_0^h \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u-x)}}$$

$$\frac{x}{h} \in \{0, 1, x, \infty\}.$$

C'est une intégrale elliptique qui est fonction de la variable x , racine du polynôme du 3^e degré soumis au radical; elle admet pour demi-périodes les différences: $U_x - U_0, U_x - U_1$.

Les 2 substitutions deviennent dans ce cas:

$$S_1 \begin{cases} \omega_1' = \omega_1 \\ \omega_2' = \omega_2 + 2\omega_1 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} \omega_1'' = \omega_1 + 2\omega_2 \\ \omega_2'' = \omega_2 \end{cases}$$

Le rapport des périodes: $\frac{\omega_2}{\omega_1}$

est une certaine fonction de x ;

on sait que c'est un nombre imaginaire; donc sa partie imaginaire ne s'annule jamais (sauf peut-être aux points critiques 0, 1.)
 Il en résulte que si l'on franchit les coupures un nombre quelconque de fois (sans passer par les points critiques) c'a d. si l'on fait toutes les

substitutions possibles du groupe, la partie imaginaire de ce rapport conserve toujours le même signe. En effet, appelons z ce rapport, z', z'' le résultat des substitutions S_1, S_2 sur $\frac{\omega_2}{\omega_1}$:

$$z = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$z' = z + 2$$

$$z'' = \frac{z}{2z+1}$$

Ces 2 substitutions rentrent dans le type suivant:

$$z' = \frac{az+b}{cx+d}$$

$$\text{où: } ad - bc = +1.$$

En effet, posons explicitement:

$$z = x + yi:$$

$$z' = \frac{ax+b+ayi}{cx+d+cyi} = \frac{(ax+b+ayi)(cx+d-cyi)}{(cx+d)^2 + (cy)^2}$$

Il y a à considérer quel signe de la partie imaginaire du numérateur; elle est: $ay(cx+d) - cy(ax+b) = +y$

en vertu de l'hypothèse particulière où nous sommes placés; donc la partie imaginaire de z' a le même signe que y .

D'ailleurs ω_1 n'est jamais nul, car alors il n'y aurait plus qu'une période; donc z n'a pour points singuliers que:

$$0, 1, \text{ et } \infty.$$

En faisant l'inversion de la fonction z de x , c.à.d. en posant:

$$\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)} = z$$

et en tirant x en fonction de z ,

on trouve que x est une fonction uniforme de z .

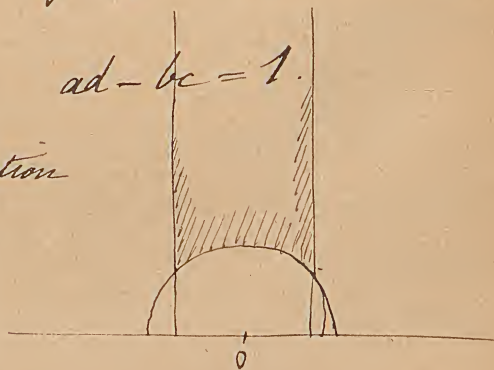
Pour le prouver, on assujettira x à rester dans la partie du plan supérieure à l'axe réel, et on cherchera quelle partie du plan des z correspond au demi-plan des x . En choisissant une détermination

du radical: $\sqrt{u(u-1)(u-x)}$ en un point initial, la fonction z sera bien déterminée dans tout le demi-plan supérieur, puisqu'on ne pourra tourner autour des points critiques 0 et 1. Quand le point x décrit l'axe réel, de 0 à 1, le point z décrit l'axe purement imaginaire; de 1 à ∞ , z décrit une demi-circonférence ayant pour centre le point $+1$; enfin, de $-\infty$ à 0, z décrit une parallèle à l'axe imaginaire. Ainsi le contour $yOMZy'$ correspond dans le plan des z à l'axe réel des x , et le quadrilatère curviligne qu'il enferme, au demi-plan supérieur. On trouverait de même qu'un demi-plan inférieur correspond le quadrilatère $yON-zy''$ symétrique du précédent par rapport à l'axe imaginaire; de sorte que l'ensemble de la surface comprise entre les 2 parallèles: zy' , $-zy''$, et les 2 circonférences M et N correspond au plan entier des x (à l'exception des pt. critiques). Cette figure se répète indéfiniment de part et d'autre, parallèlement à elle-même; c'est ce qu'on appelle le polygone fondamental de la substitution considérée:

$$z' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

où: $ad - bc = 1$.

(Le polygone fondamental de la substitution qu'on a, où: $ad - bc \geq 1$, est de la forme suivante:



Calcul des variations.

Le problème auquel s'applique la méthode des variations et pour lequel elle a été inventée est le suivant:

Etant donnée une intégrale de la forme:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y') dx \quad (x_0, x_1 \text{ limites fixes})$$

trouver une fonction y de x qui rende cette intégrale maximale ou minimale, c'à-d. plus grande ou plus petite que les intégrales infiniment voisines qu'on obtiendrait en substituant à y des fonctions infiniment peu différentes.

Ce problème a été étudié par Euler, puis par Lagrange, qui l'ont ramené à une question de calcul intégral moyennant certaines restrictions -

Supposons qu'on assujettisse la fonction y à prendre aux limites x_0, x_1 des valeurs fixes données y_0, y_1 . Toute fonction de x soumise à ces conditions sera représentée par une courbe passant par les 2 points fixes $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$

Soit: $y = f(x)$ celle de ces fonctions qui rend l'intégrale maximale ou minimale; Supposons que toutes les autres puissent se mettre sous la forme: $y = F(x, \alpha)$ de telle sorte que pour une certaine valeur de α , soit α_0 , F se réduise à f : $F(x, \alpha_0) = f(x)$

et que, pour $x = x_0, x = x_1$, y prenne les valeurs y_0, y_1 ,

quelque soit α : $F(x_0, \alpha) = y_0$ $F(x_1, \alpha) = y_1$
 Elle serait, par exemple, la fonction suivante :

$$y = f(x) + (\alpha - \alpha_0)(x - x_0)(x - x_1) \psi(x, \alpha)$$

$f(x)$ prenant les valeurs y_0, y_1 pour $x = x_0, x = x_1$, et ψ étant une fonction quelconque de x et du paramètre α .
 Supposons enfin que les dérivées premières de F soient continues dans l'intervalle (x_0, x_1) . Si l'on substitue F à y dans S , cette intégrale deviendra une fonction de α , et elle aura maxima ou minima pour : $\alpha = \alpha_0$. On est ainsi ramené au problème connu des maximum et du minimum d'une fonction d'une variable ; on sait que la condition nécessaire est que la dérivée ou la différentielle par rapport à la variable soit nulle, et cette condition détermine la ou les valeurs de la variable qui correspondent aux maxima et minima de la fonction.

On appellera variation la différentielle de l'intégrale par rapport au paramètre α , et on la désignera par la lettre δ , en réservant le d pour les différentielles relatives à x .
 Les 2 variables x, α étant absolument indépendantes, les différentielles par rapport à chacune d'elles sont distinctes ; leur ordre est donc indifférent, et l'on a : $d\delta f = \delta df$.

Tout revient donc à annuler la variation de S . Calculons-la en différentiant sous le signe Somme :

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' dx$$

93

Transformons la 2^e intégrale en l'intégrant par parties; remarquons en effet que:

$$dy' dx = d(y' dx) = d \cdot dy = d \cdot dy$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y'} \cdot d dy = \left[\frac{\partial V}{\partial y'} dy \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \right) dy \cdot dx$$

Où la partie intégrée est nulle, car dy est nulle aux 2 limites, toute fonction y prenant les valeurs y_0 y_1 quel que soit α .
On a donc, en réunissant les 2 intégrales:

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \right) \right] dy dx$$

Pour $\alpha = \alpha_0$, c'a'd pour un maximum ou minimum de S , la quantité entre crochets, qui est une fonction de x , doit être identiquement nulle, c'a'd qu'on doit avoir, en substituant dans

$$V: \quad y = f(x), \text{ la relation: } \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \right) = 0.$$

En effet si cela n'avait pas lieu, on pourrait s'arranger pour donner à dy toujours le même signe qu'aurait la quantité entre crochets, de façon que δS , somme d'éléments incessamment positifs, ne pourrait être nulle. Par exemple, en supposant y de la forme:

$$y = f(x) + (\alpha - \alpha_0)(x_1 - x)(x_0 - x) \psi(x)$$

$$\text{on aurait: } dy = d\alpha (x_1 - x)(x_0 - x) \psi(x)$$

et il suffirait de choisir convenablement $\psi(x)$ pour disposer du signe de dy dans le sens que nous venons d'indiquer.

Ainsi, pour que δS s'annule, il faut donc que l'on ait ^{formellement} $\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \right) = 0$ (V)

pour $x = x_0$, on: $y = f(x)$. Cela revient à dire que la fonction y qui rend l'intégrale S maxima ou minima est une solution de l'équation différentielle du 2^e ordre (V).

L'intégrale générale de cette équation contient 2 constantes arbitraires; mais elles seront déterminées par les conditions aux limites: $f(x_0) = y_0$ $f(x_1) = y_1$ (en général)

La fonction y sera donc bien déterminée; d'où il y aura qu'un nombre fini de solutions bien distinctes, c'est-à-dire géométriquement, de courbes qui ne seront pas infiniment voisines.

— Cas particulier. Supposons que x ne figure pas dans V ; on aura dans ce cas une équation du 2^e ordre entre y, y', y'' qui se ramène à des quadratures.

En effet, on a alors: $dV = \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial y'} dy'$

d'où: $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV - \frac{\partial V}{\partial y'} dy'}{dy}$

L'équation (V) devient: $dV - \frac{\partial V}{\partial y'} dy' - \frac{dy}{dx} \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \right) = 0$

dy et dx étant des différentielles infinitésimales, on peut les remplacer par leur quotient: $dV - \frac{\partial V}{\partial y'} dy' - y' d \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \right) = 0$

On intègre immédiatement: $V - y' \frac{\partial V}{\partial y'} = C$

d'où l'on tirera: $y' = \varphi(y, C)$

et l'on aura y par une quadrature, avec une nouvelle constante.

- Exemple: Trouver la plus courte ligne entre 2 points donnés.

Il s'agit de trouver le minimum de l'intégrale:

$$\int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$V = \sqrt{1+y'^2}$$

L'équation différentielle se réduit à: $\frac{d}{dx} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$

d'où, en intégrant: $y' = C$

Intégrons de nouveau:

$$y = Cx + C'$$

Telle est l'équation la plus générale des lignes demandées; les constantes C et C' sont déterminées par les conditions aux limites, c'est par les coordonnées des 2 points. On trouve la droite qui joint ces 2 points - Ce résultat est une vérification, et non une démonstration, car les propriétés de la ligne droite sont impliquées dans la définition de l'élément linéaire ds^2 .

- Considérons l'équation différentielle du 2^e ordre:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})$$

Son intégrale contiendra 2 constantes arbitraires. On peut déterminer cette intégrale en l'assujettissant à prendre la valeur A pour $x=a$, et la valeur B pour $x=b$; c'est en assignant la courbe intégrale à passer par les 2 points (a, A) et (b, B) . Supposons pour simplifier, que ce second point soit l'origine; nous voulons obtenir une intégrale de cette équation qui passe par les 2 points $(0, 0)$ et (a, A) .

Pour cela, nous procéderons par approximations successives. Prenons pour première approximation la droite qui joint les 2 points, dont l'ordonnée est :

$$y_0 = \frac{A}{a} x$$

et substituons-la dans l'équation :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y_0, \frac{dy_0}{dx}) = \phi_0(x)$$

Cette équation s'intègre par 2 quadratures superposées qui se réduisent à une seule. On déterminera l'intégrale y_1 par les conditions aux limites : $y=0$ pour $x=0$, $y=A$ pour $x=a$. On substituera alors cette fonction y_1 dans l'équation :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}) = \phi_1(x)$$

qu'on résoudra de même, et d'où l'on tirera une intégrale y_2 soumise aux mêmes conditions aux limites, et ainsi de suite.

On obtiendra ainsi une suite de fonctions : $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ prenant toutes pour $x=0$ la valeur 0, et pour $x=a$ la valeur A . On va prouver que, si la distance des 2 points $(0,0)$ et (a,A) est suffisamment petite, cette suite a une limite qui est une fonction bien déterminée de x , et qui prend aussi aux limites les valeurs 0 et A .

Or la fonction :

$$y = \int_0^x \phi(z)(x-z) dz$$

considérée comme fonction de x , est une intégrale de l'équation considérée ; en effet :

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \phi(z) dz$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \phi(x)$$

(le terme relatif à la limite x est nul.)

97

Comme la fonction y n'est déterminée que par la dérivée seconde, on peut lui ajouter 2 constantes, c'est un binôme du 1^{er} degré; ces 2 constantes sont déterminées par les conditions aux limites. Pour que: $y=0$ pour $x=0$, il faut que la constante additive soit nulle; donc y est de la forme:

$$y = \int_0^x \varphi(z)(x-z) dz + bx$$

Pour que $y=A$ pour $x=a$, il faut que b vérifie l'équation:

$$A = \int_0^a \varphi(z)(a-z) dz + ba \quad b = \frac{A}{a} - \frac{1}{a} \int_0^a \varphi(z)(a-z) dz$$

On a donc l'intégrale bien déterminée:

$$y = \int_0^x \varphi(z)(x-z) dz + \frac{A}{a}x - \frac{x}{a} \int_0^a \varphi(z)(a-z) dz$$

d'où: $\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(z) dz + \frac{A}{a} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)$

Soit M le module maximum de $\varphi(z)$ dans l'intervalle $(0, a)$. Calculons le maximum de la valeur absolue de y . On a évidemment: $|x-z| \leq a$, $\frac{x}{a} \leq 1$, $\left| \int_0^x dz \right| \leq a$, puisque $0 \leq x \leq a$.

Donc: $|y| < Ma^2 + A + Ma^2 = 2Ma^2 + A$

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| < Ma + \frac{A}{a}$$

Nous supposons que: $f(x, y, y')$ est une fonction bien définie quand $|y| \leq L$, et reste dans ces limites inférieures à M et $|y'| \leq L$.

en valeur absolue. - Nous supposons de plus que pour 2 systèmes de valeurs $(y_1, y'_1), (y_0, y'_0)$ pris dans ces limites, on a:

$$|f(x, y_1, y'_1) - f(x, y_0, y'_0)| < \alpha |y_1 - y_0| + \beta |y'_1 - y'_0|$$

pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle $(0, a)$, α, β étant 2 quantités finies et fixes.

Pour que l'on puisse obtenir la suite infinie: $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ il faut que les fonctions successives y_1, y_2, \dots, y_n restent inférieures en valeur absolue à I , x restant compris dans l'intervalle $(0, a)$.

On va prouver que si la distance des 2 points $(0, 0)$ et (a, A) est suffisamment petite, on aura toujours: $|y_n| < I$.

En effet, sous la condition: $\phi(x) < M$, on a:

$$|y_1| < 2Ma^2 + A$$

$$\left| \frac{dy_1}{dx} \right| < Ma + \frac{A}{a}$$

Donc, si a et A sont assez petits, on aura à la fois:

$$|y_1| < I$$

$$|y'_1| < I$$

Ce qui revient à dire que la distance des 2 points est assez petite. - Mais alors on aura: $|\phi_1(x)| < M$, et par suite les mêmes

inégalités que ci-dessus pour y_2 et y'_2 ; et ainsi de suite, de sorte que si la condition: $|y_0| < I, |y'_0| < I$

est vérifiée, elle sera vérifiée pour toutes les fonctions y_1, y_2, \dots, y_n et pour leurs dérivées, indéfiniment: toutes les fonctions y_1, y_2, \dots, y_n resteront comprises dans l'intervalle $(-I, +I)$. Reste à prouver qu'elles ont une limite.

Supposons: $A=0$. On aura les 2 maxima suivants:

$$|y| < 2ma^2$$

$$|y'| < Ma$$

qui se réduisent à un seul en supposant:

$$a \leq \frac{1}{2}$$

$$|y| < Ma$$

$$|y'| < Ma$$

Soit K le module maximum des différences: $\begin{cases} (y_1 - y_0) \\ (y'_1 - y'_0) \end{cases}$
dans l'intervalle $(0, a)$. On a identiquement:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = f(x, y_0, y'_0)$$

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} = f(x, y_1, y'_1)$$

d'où, en retranchant: $\frac{d^2 (y_2 - y_1)}{dx^2} = f(x, y_1, y'_1) - f(x, y_0, y'_0)$

$$\frac{d^2 (y_2 - y_1)}{dx^2} < \alpha |y_1 - y_0| + \beta |y'_1 - y'_0| < (\alpha + \beta) K$$

Par suite: $|y_2 - y_1| < K(\alpha + \beta) a$, $|y'_2 - y'_1| < K(\alpha + \beta) a$.

En appliquant la même série d'inégalités à la relation:

$$\frac{d^2 (y_3 - y_2)}{dx^2} = f(x, y_2, y'_2) - f(x, y_1, y'_1)$$

on trouve: $\frac{d^2 (y_3 - y_2)}{dx^2} < K(\alpha + \beta)^2 a$

d'où: $|y_3 - y_2| < K(\alpha + \beta)^2 a^2$

$$|y'_3 - y'_2| < K(\alpha + \beta)^2 a^2$$

et ainsi de suite; on trouvera

généralement:

$$|y_{n+1} - y_n| < K(\alpha + \beta)^n a^n$$

$$|y'_{n+1} - y'_n| < K(\alpha + \beta)^n a^n$$

Or, si l'on prend a suffisamment petit, on aura:

$$(\alpha + \beta) a < 1,$$

et dès lors:

$|y_{n+1} - y_n|$ et $|y'_{n+1} - y'_n|$ tendront vers zéro comme le terme général d'une progression géométrique décroissante. Donc les 2 suites: $y_0, y_2, \dots, y_n, \dots$, $y'_0, y'_2, \dots, y'_n, \dots$ sont convergentes, et ont pour limites 2 fonctions y, y' , dont la 2^e est la dérivée de la 1^{re}.

Reste à prouver que la fonction y satisfait l'équation différentielle proposée. Or on obtient le terme y_n en intégrant l'équation:

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = f(x, y_{n-1}, y'_{n-1})$$

$$y_n = \int_0^x f(z, y_{n-1}, y'_{n-1})(x-z) dz + \frac{A}{a} x - \frac{x}{a} \int_0^a f(z, y_{n-1}, y'_{n-1})(a-z) dz$$

Si l'on fait tendre n vers ∞ , l'indice disparaît, et l'on trouve:

$$y = \int_0^x f(z, y, y')(x-z) dz + \frac{A}{a} x - \frac{x}{a} \int_0^a f(z, y, y')(a-z) dz$$

d'où l'on tire, en différentiant 2 fois:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

ce qui prouve que y vérifie l'équation proposée.

Ainsi, étant donnés dans le plan 2 points suffisamment voisins, on peut affirmer qu'il passe par ces 2 points une courbe intégrale; il peut d'ailleurs en passer plusieurs, et c'est ce qui arrive en général.

Dans le cas particulier de l'équation linéaire du 2^e ordre (homogène)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2A \frac{dy}{dx} + By$$

où A, B sont des fonctions de x continues entre x_0 et x_1 ,

on peut prouver qu'il n'y a qu'une seule intégrale qui prenne les valeurs y_0, y_1 pour $x=x_0, x=x_1$, c'est une seule courbe intégrale passant par les points $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$.

Soit en effet une autre intégrale passant par les mêmes points: l'équation étant linéaire, la différence des 2 intégrales serait encore une intégrale, et celle s'annulerait pour $x=x_0, x=x_1$.

La question est de savoir si l'équation linéaire admet une solution qui s'annule aux 2 limites x_0, x_1 sans être constamment nulle dans cet intervalle. Soit y une telle solution, l'intégrale:

$$\int_{x_0}^{x_1} y \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - 2A \frac{dy}{dx} - By \right] dx$$

sera identiquement nulle (le crochet étant constamment nul).

Intégrons par parties le 1^{er} terme:

$$\int_{x_0}^{x_1} y \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \left[y \frac{dy}{dx} \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

La partie intégrée est nulle, puisque par hypothèse $y=0$ aux 2 limites. On a donc encore identiquement:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2Ay \frac{dy}{dx} + By^2 \right] dx = 0$$

L'élément différentiel est une forme quadratique en y et $\frac{dy}{dx}$. Si cette forme est définie entre x_0 et x_1 , c'est-à-d. garde un signe constant ($A^2 \leq B$) l'élément différentiel devra être identiquement nul (pour que l'intégrale s'annule), c'est-à-d. qu'il faut que y soit constamment nul, et par suite aussi $\frac{dy}{dx}$. Donc



dans le cas où: $A^2 \leq B$, l'équation linéaire homogène du 2^e ordre n'admet qu'une intégrale passant par 2 points donnés.

— On dit remarquer l'analogie qui existe entre les théorèmes précédents et le problème fondamental du calcul des variations. Ils vont en effet trouver leur application dans l'étude de la variation seconde, de laquelle dépend la connaissance complète des maxima et minima d'une intégrale. Nous considérons toujours la fonction:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y') dx$$

dont la variation première est:

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial V}{\partial y'} \right] \right) \delta y \cdot dx$$

Calculons la variation seconde (différentielle seconde par rapport à α):

$$\delta^2 S = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right] dx$$

Il y aurait encore un terme:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \right) \right] \delta^2 y$$

provenant de la différentiation de δy , mais il disparaît, puisqu'on suppose que δS est nulle, c'est que la fonction y vérifie l'équation:

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1)$$

Nous allons transformer l'expression de $\delta^2 S$ comme nous avons fait celle de δS :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y'^2 dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y' \cdot d\delta y = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y \delta y' \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y' \right) \delta y \cdot dx$$

La partie intégrée est nulle, donc: $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} dy'^2 dx = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W}{\partial y'^2} dy' \right) dy \cdot dx$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial y'} dy dy' \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial W}{\partial y \partial y'} dy \cdot d dy = \left[\frac{\partial W}{\partial y \partial y'} dy^2 \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} dy \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W}{\partial y \partial y'} dy \right) dx$$

La partie intégrée est nulle, il reste donc:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial y'} dy dy' \cdot dx = - \int_{x_0}^{x_1} dy \frac{\partial W}{\partial y \partial y'} dy' dx - \int_{x_0}^{x_1} dy^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W}{\partial y \partial y'} \right) dx$$

d'où: $2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial y'} dy dy' \cdot dx = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W}{\partial y \partial y'} \right) dy^2 \cdot dx$

On a en somme:

$$\delta^2 S = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} dy^2 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W}{\partial y \partial y'} \right) dy^2 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W}{\partial y'^2} dy' \right) dy \right] dx$$

$$\delta^2 S = \int_{x_0}^{x_1} \left[P dy - \frac{d}{dx} (Q dy') \right] dy \cdot dx$$

en posant:

$$P = \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W}{\partial y \partial y'} \right) \quad Q = \frac{\partial W}{\partial y'^2}$$

P et Q sont des fonctions de x . Posons: $dy = z$
et égalons à 0 le crochet qui figure dans l'intégrale:

$$Pz - \frac{d}{dx} \left(Q \frac{dz}{dx} \right) = 0 \quad (2)$$

Le maximum et le minimum de S dépend de cette équation linéaire homogène du 2^e ordre. Or cette équation est liée à

l'équation (1) qui exprime la condition pour que δS s'annule; car si l'on intègre l'équation (1), et nous supposons qu'on l'a intégrée, on trouve la solution: $y = f(x, C_1, C_2)$

qui annule la variation première. On peut en conclure l'intégrale générale de l'équation (2). Nous allons prouver, en effet, que celle-ci admet comme intégrales: $\frac{\partial f}{\partial C_1}, \frac{\partial f}{\partial C_2}$

Substituons dans l'équation (1): $y = f(x, C_1, C_2)$ elle devient une identité. Différencions-la par rapport à C_1 , on a identiquement:

$$\frac{\partial V}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial C_1} + \frac{\partial V}{\partial y \partial y'} \frac{\partial f}{\partial x \partial C_1} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial V}{\partial y \partial y'} \frac{\partial f}{\partial C_1} + \frac{\partial V}{\partial y'^2} \frac{\partial f}{\partial x \partial C_1} \right] = 0$$

En effectuant les différentiations indiquées, 2 termes se détruisent, il reste:

$$\frac{\partial V}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial C_1} - \frac{\partial f}{\partial C_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial V}{\partial y \partial y'} \right) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial V}{\partial y'^2} \frac{\partial f}{\partial x \partial C_1} \right] = 0$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial C_1}$ vérifie l'équation (2); $Pz - \frac{d}{dx} \left(Q \frac{dz}{dx} \right) = 0$

On obtiendrait la même identité pour $\frac{\partial f}{\partial C_2}$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial C_1}, \frac{\partial f}{\partial C_2}$ forment un système fondamental de l'équation (2), et par conséquent, quand on connaît l'intégrale générale de l'équation (1), on connaît celle de l'équation (2). C'est de la nature de ces intégrales que dépend l'existence du maximum ou du minimum de S .

— Soit z une intégrale quelconque de l'équation (2). Prenons:

$$\delta y = tz$$

t étant une nouvelle variable infiniment petite comme dy .

l'élément différentiel de $\delta^2 S$:

$$dy \left[P dy - \frac{d}{dx} (Q dy') \right]$$

devient:

$$t \left[P t \dot{x} - \frac{d}{dx} \left(Q \frac{d(t \dot{x})}{dx} \right) \right]$$

Le crochet devient:

$$P t \dot{x} - \frac{d}{dx} \left(Q t \frac{dx}{dx} + Q \dot{x} \frac{dt}{dx} \right) = - Q \frac{dx}{dx} \frac{dt}{dx} - \frac{d}{dx} \left(Q \dot{x} \frac{dt}{dx} \right)$$

$$= - 2 Q \frac{dx}{dx} \frac{dt}{dx} - \dot{x} \frac{d}{dx} \left(Q \frac{dt}{dx} \right)$$

Multiplions par $t \dot{x}$:

$$t \left[- 2 \dot{x} \frac{dx}{dx} \cdot Q \frac{dt}{dx} - \dot{x}^2 \frac{d}{dx} \left(Q \frac{dt}{dx} \right) \right] = - t \frac{d}{dx} \left(Q \dot{x}^2 \frac{dt}{dx} \right) \quad \text{Donc:}$$

$$\delta^2 S = - \int_{x_0}^{x_1} t \frac{d}{dx} \left(Q \dot{x}^2 \frac{dt}{dx} \right) dx$$

Intégrons par parties: la partie intégrée est nulle, car t s'annule comme dy aux limites x_0, x_1 ; il reste donc:

$$\delta^2 S = \int_{x_0}^{x_1} Q \dot{x}^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 dx$$

$$Q = \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

On voit que le signe de la variation seconde dépend de Q seul.

Si Q change de signe dans l'intervalle (x_0, x_1) il n'y aura ni maximum ni minimum, car $\delta^2 S$ pourra aussi changer de signe.

Supposons que dans l'intervalle (α, β) $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ soit constamment positif: on prendra une intégrale \underline{x} ne s'annulant pas dans cet intervalle, et on choisira \underline{t} fonction de \underline{x} non nulle dans l'intervalle (α, β) mais nulle de x_0 en α et de β en x_1 , de sorte que \underline{dy} soit nulle de A à α , de β à B , et varie en \underline{x} ; de sorte que \underline{dy} soit nulle de A à α , de β à B , et varie en \underline{x} .

entre α et β . La valeur de $\delta^2 S$ se réduira à l'intégrale:

$$\int_{\alpha}^{\beta} Q z^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 dx > 0$$

Si au contraire Q est négatif sur un autre arc $\alpha'\beta'$, on prendra toujours une intégrale \geq ne s'annulant pas dans cet intervalle, on choisira t nul de A à α' et de β' à B et variable entre α' et β' ; on aura:

$$\delta^2 S = \int_{\alpha'}^{\beta'} Q z^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 dx < 0$$

Ainsi, en choisissant convenablement des courbes infiniment voisines de la courbe qui annule la variation première, on pourra donner à la variation seconde le signe qu'on voudra. Nul y a dans ce cas ni maximum ni minimum pour cette courbe.

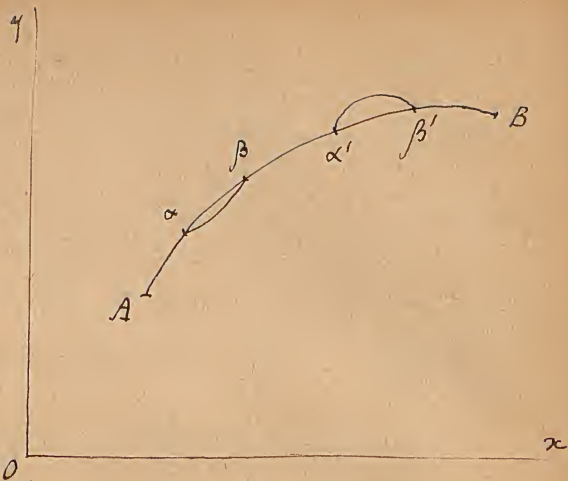
Donc, pour que la courbe qui correspond à $\delta S = 0$, donne lieu à un maximum ou minimum de S , il faut que $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ ait un signe invariable le long de cette courbe.

Cette condition n'est pas suffisante, et il faut distinguer ici 2 cas.

Supposons que l'équation (2) admette une intégrale z ne s'annulant pas dans l'intervalle (x_0, x_1) . Faisons le changement de variable:

$$\delta y = tz.$$

Q a par hypothèse un signe invariable, par exemple le signe +. Pour que $\delta^2 S$ s'annule, il faudrait que $z^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2$ fût



107

constamment nul; or $z^2 > 0$, il faudrait donc que $\frac{dt}{dx}$ fût constamment nul, c'à d. que t fût constant; mais comme t est nul aux 2 limites, il faudrait que t fût constamment nul, c'à d. qu'il n'y eût pas de variation δy . Donc pour toute courbe voisine de la courbe qui annule δS , $\delta^2 S$ sera différente de 0, et aura le même signe que Q .

Si le signe invariable de Q est $-$, il y aura un maximum; s'il est $+$, il y aura un minimum de S pour cette courbe.

— Supposons maintenant que l'équation (2) n'admette aucune intégrale qui garde un signe invariable entre x_0 et x_1 . On va montrer qu'on pourra toujours annuler $\delta^2 S$, Q ayant par hypothèse un signe invariable.

Soient z_1, z_2 2 intégrales distinctes de l'équation (2), formant un système fondamental. Nous savons évaluer le déterminant:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} - \int p dx$$

Il a pour expression:
(cf page 59).

$$z_1 \frac{dz_2}{dx} - z_2 \frac{dz_1}{dx} = C e$$

p étant le coefficient du 2^e terme de l'équation linéaire dont le 1^{er} coefficient est 1;

$$p = \frac{1}{Q} \cdot \frac{dQ}{dx}$$

$$\int p dx = \log Q$$

$$z_1 \frac{dz_2}{dx} - z_2 \frac{dz_1}{dx} = C e^{-\log Q} = \frac{C}{Q}$$

Divisons les 2 membres par z_1^2 : $\frac{d}{dx} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) = \frac{C}{Q z_1^2}$

Le 2^e membre a, par hypothèse, un signe invariable, donc $\frac{z_2}{z_1}$

varie toujours dans le même sens. Supposons que $\frac{Z_2}{Z_1}$ aille en croissant constamment: soit m la valeur de ce rapport pour $x = x_0$; il augmentera jusqu'à $+\infty$, puis de $-\infty$ à une certaine valeur n qu'il atteindra pour $x = x_1$. Je dis que:

$n > m$ En effet, si l'on avait: $n < m$,

le rapport $\frac{Z_2}{Z_1}$ ne prendrait jamais une certaine valeur μ :

$n < \mu < m$, de sorte que l'intégrale: $Z_2 - \mu Z_1$

ne s'annulerait jamais dans l'intervalle (x_0, x_1) ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc: $n > m$,

cà d. que le rapport $\frac{Z_2}{Z_1}$ parcourt entre x_0 et x_1 toute l'échelle des valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$. — Or si l'on considère en particulier l'intégrale: $Z_2 - m Z_1$

on voit qu'elle s'annule pour $x = x_0$, et pour $x = x_1$.

On aura ainsi une intégrale Z s'annulant au point A et au point C qui se trouve sur l'arc AB.

On peut dès lors s'arranger pour que:

$$\delta^2 S = 0$$

On prendra: $dy = tx$

de A en C, t étant ici une constante (infinitésimale) et

$$dy = 0$$

de C en B.

On aura bien:

$$dy = 0$$

— en A, B et C. La valeur de $\delta^2 S$ sera

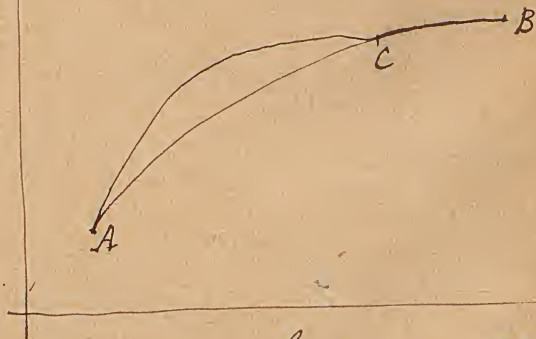
nulle, puisque

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

de A en C,

et ~~de C en B.~~

de C en B.



109

Ainsi on peut imaginer une loi de variation continue pour y et dy , telle que l'on ait :

$$\delta^2 S = 0$$

Dans ce cas, on peut dire qu'il n'y aura en général ni maximum ni minimum. Pour pouvoir l'affirmer dans chaque cas particulier, on devra étudier la variation troisième, et il faudra qu'elle ne s'annule pas dans l'intervalle (x_0, x_1) . Si elle s'annulait, on serait obligé de recourir à la variation quatrième, et ainsi de suite. Il y aura maximum ou minimum quand la 1^{re} variation qui ne s'annule pas est d'ordre pair, et selon qu'elle a le signe - ou le signe +.

En se restreignant à l'examen de la variation du 2^o ordre, on voit que pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut que Q ait un signe invariable et que l'équation (2) admette une intégrale qui garde un signe invariable entre x_0 et x_1 . Le maximum correspond au cas où Q est négatif, le minimum à Q positif.

Nous allons appliquer les conclusions de la théorie précédente à un exemple classique.

Problème. Étant donnés dans un plan 2 points A et B et un axe Ox, faire passer par ces 2 points une courbe telle qu'en tournant autour de cet axe elle engendre une surface de révolution d'aire minima.

Soient x_0, x_1 les abscisses des 2 points donnés; l'élément de surface engendré par l'élément linéaire ds d'ordonnée y est : $2\pi y ds$; en intégrant (et multipliant le facteur à 2π) on trouve pour la surface totale :

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Écrivons la condition pour que δS soit nulle. Comme x manque dans V , on a immédiatement l'intégrale première (page 94):

$$V - y' \frac{\partial V}{\partial y'} = C^{\text{te}} \quad \text{cà d:} \quad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

$$\frac{y^2}{C_1^2} = 1 + y'^2 \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1} \quad \frac{dx}{C_1} = \frac{\frac{dy}{C_1}}{\sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1}}$$

$$\frac{x+C_2}{C_1} = \log \left[\frac{y}{C_1} + \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1} \right] \quad \frac{y}{C_1} + \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1} = e^{\frac{x+C_2}{C_1}}$$

d'où l'on tire, par un calcul connu, l'équation générale de la chaînette.

$$y = \frac{C_1}{2} \left[e^{\frac{x+C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x+C_2}{C_1}} \right]$$

Supposons en particulier A et B symétriques par rapport à l'axe Oy (à la même distance de l'axe donné Ox). La chaînette aura Oy pour axe de symétrie, et son équation se simplifiera:

$$y = \frac{c}{2} \left[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right]$$

Il suffit maintenant de déterminer c de manière que la chaînette passe par B (de coordonnées a, b). On a ainsi l'équation de condition:

$$b = \frac{c}{2} \left[e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}} \right]$$

qui détermine la constante c . Il s'agit de savoir combien de racines



positives a cette equation; à chaque racine correspondra une chaîne passant par A, B et annulant δS .

Pour cela, posons:

$$\varphi = \frac{z}{2} \left[e^{\frac{a}{z}} + e^{-\frac{a}{z}} \right]$$

et construisons la courbe dont les coordonnées sont φ et z .

Calculons d'abord $\varphi'(z)$; on trouve, en développant les exponentielles en

série:
$$\varphi(z) = 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} - \frac{3}{4!} \frac{a^4}{z^4} - \frac{5!}{6!} \frac{a^6}{z^6} - \dots$$

On voit que φ' augmente constamment avec $|z|$; pour $z = 0$, $\varphi' = -\infty$; pour $z = +\infty$, $\varphi' = 1$.

La courbe (φ, z) a donc la forme indiquée; elle a pour asymptote 0φ et tourne constamment sa concavité vers les y positives;

elle tend à prendre la direction dont le coefficient angulaire est 1.

La fonction φ passe nécessairement par un minimum, et un seul.

L'équation $\varphi'(z) = 0$ a une seule racine positive, z_1 , dont la valeur est:

$$\frac{a}{z_1} = 1, 199 \dots$$

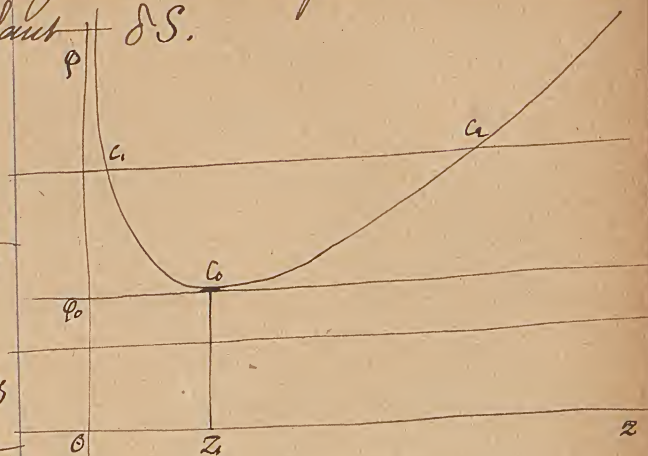
Cette valeur de z correspond au minimum φ_0 de φ , donné par la formule:

$$\frac{\varphi_0}{z_1} = 1, 8107 \dots$$

d'où l'on conclut:

$$\frac{\varphi_0}{a} = 1, 5088 \dots$$

Donc, si $b > \varphi_0$, l'équation en c aura 2 racines; si $b = \varphi_0$, elle n'en aura qu'une; si $b < \varphi_0$, elle n'en aura pas.



Autrement dit, si $\frac{b}{a} > 1,5088\dots$ on aura 2 chaînettes;

si $\frac{b}{a} = 1,5088\dots$ on n'aura qu'une chaînette;

si $\frac{b}{a} < 1,5088\dots$ on n'aura pas de solution.

Ce dernier résultat semble absurde, car il est impossible qu'une courbe quelconque allant de A en B soit nulle; il doit donc toujours y avoir une courbe répondant à la question, c'est-à-dire engendrant une surface d'aire minima. La méthode des variations paraît ici toucher en défaut. Nous expliquerons plus loin cette anomalie.

Il nous faut auparavant discuter le maximum ou le minimum de S qui correspond à chacune des 2 solutions. Qu'adviendra-t-il

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = \frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Q a un signe invariable pour chacune des 2 chaînettes, car y est toujours positif, et le dénominateur est essentiellement positif. Pour avoir 2 intégrales distinctes de l'équation (2), nous savons qu'il suffit de prendre:

$$\frac{\partial f}{\partial C_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial C_2} \quad \text{ici on a:}$$

$$f = \frac{C_1}{2} \left[e^{\frac{x+C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x+C_2}{C_1}} \right]$$

Nous prendrons les dérivées en y faisant $C_2 = 0$, $C_1 = c$.

$$Z_1 = \frac{\partial f}{\partial C_1} = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right] - \frac{x}{2c} \left[e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right]$$

$$Z_2 = \frac{\partial f}{\partial C_2} = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right]$$

Pour savoir si l'équation (2) admet une intégrale gardant son signe

invariable entre x_0 et x_1 , on peut étudier le rapport $\frac{Z_1}{Z_2}$:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}} - \frac{x}{c}$$

Où : $y' = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right]$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{y}{cy'} - \frac{x}{c} = \frac{1}{c} \left(\frac{y}{y'} - x \right)$$

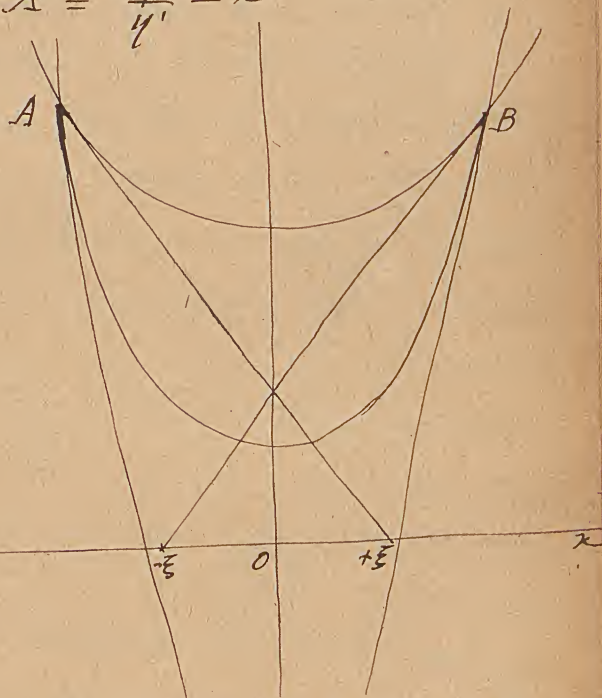
Ce rapport a une interprétation géométrique fort remarquable.

Écrivons l'équation de la tangente : $Y - y = y'(X - x)$

Cherchons l'abscisse du point où elle rencontre Ox ($Y=0$) :

$$-\frac{y}{y'} = X - x$$

$$-X = \frac{y}{y'} - x$$



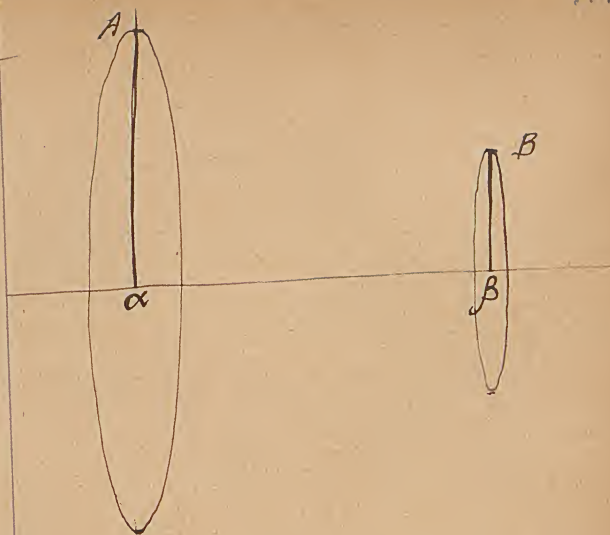
Pour savoir si le rapport $\frac{Z_1}{Z_2}$ peut prendre toutes les valeurs possibles dans l'intervalle (x_0, x_1) qui est ici $(-a, +a)$, il suffit de chercher si X peut prendre toutes les valeurs possibles quand le point de contact de la tangente se déplace de A en B. En étudiant les 2 chaînettes, on trouve que les tangentes en A et B à la chaînette supérieure se rencontrent au-dessus de l'axe des x , et que les tangentes en A et B à la chaînette inférieure se rencontrent au-dessous de Ox. Pour aller-ci, l'abscisse X pourra prendre toutes les valeurs possibles.

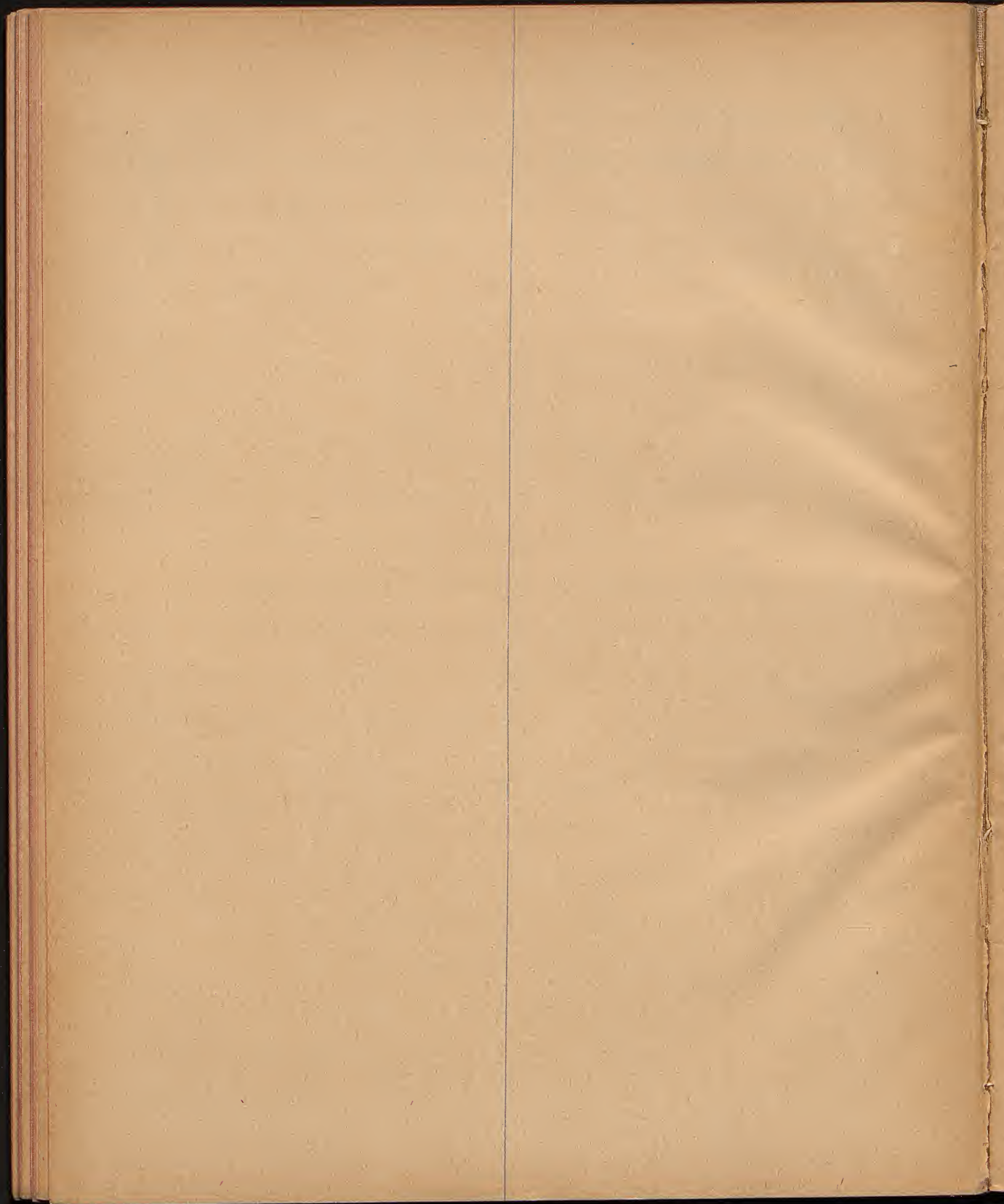
entre $-\infty$ et $+\infty$, en passant 2 fois par les valeurs comprises entre $-\xi$ et $+\xi$, tandis que pour l'abscisse X ne peut prendre les valeurs de l'intervalle $(-\xi, +\xi)$. Ainsi, pour la chaînette supérieure, il existe une certaine intégrale qui garde un signe invariable entre $-a$ et $+a$; donc cette solution correspond à un minimum. Pour la chaînette inférieure, au contraire, elle ne correspond en général ni à un maximum ni à un minimum.

- Nous avons dit que, dans le cas où : $\frac{b}{a} < 1,5088\dots$ il n'y a pas de courbe répondant à la question, du moins telle qu'elle est traduite analytiquement, alors que, géométriquement il est évident qu'il existe un minimum. Or nous avons supposé, dans les raisonnements qui nous ont amenés à l'équation (1), que dy peut prendre un signe arbitraire (page 93.) Cela est possible, en effet, tant que la courbe qui joint A et B reste au-dessus de Ox ; mais si elle vient à toucher cet axe, on ne peut plus donner à dy un signe négatif, car dès que la courbe traverse l'axe on sort des conditions géométriques du problème (l'aire engendrée par l'arc inférieur serait comptée négativement.) Donc tout ce qu'on peut conclure des résultats précédents, c'est que la courbe qui correspond au minimum géométrique de l'aire se compose d'arcs de chaînette et de segments de ligne de révolution. On trouve en effet que, dans le cas présent, la courbe répondant à la question se compose des perpendiculaires $A\alpha$, $B\beta$ abaissés sur l'axe, et du segment $\alpha\beta$ de l'axe lui-même, parce que la surface comprise des 2 cordes engendrés par αA et βB

est un minimum par rapport
aux surfaces voisines.

(cf Cours de M. Appell, Le cahier
page 18.)





Equations différentielles du premier ordre.

Règle générale: On essaie de séparer les variables par un changement de variables; la intégration est alors ramenée à 2 quadratures.

Types généraux qu'on sait intégrer, c'est-à-dire ramener aux quadratures:

I. $Mdx + Ndy = 0$ M, N fonctions homogènes du même
degré en x, y . - On en tire: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

On pose: $\frac{y}{x} = t$ $y = tx$ $y' = tx' + t$
 $tx + t = f(t)$ d'où: $\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$

Cas particuliers: M dépend d'une, N de l'autre variable, ou M et N dépendent de la même variable: séparation immédiate.

Les équations de la forme: $f(x, q(y) \frac{dy}{dx}) = 0$ $f(y, q(x) \frac{dy}{dx}) = 0$
se résolvent par rapport à $q(y)y'$ ou $q(x)y'$; séparation.

Cas particuliers: $f(x, y') = 0$ $f(y, y') = 0$
on résout par rapport à y' , et les variables sont séparées.

II. Equation linéaire: $\frac{dy}{dx} + y f(x) + q(x) = 0$

On cherche un facteur intégrant indépendant de y : soit u :

$$u dy + u[y f(x) + q(x)] dx = 0$$

Exprimons que le 1^{er} membre est différentielle totale exacte, u ne dépendant que de x .

$$\frac{du}{dx} = u f(x) \quad \text{d'où:} \quad \frac{du}{u} = f(x) dx$$

$$u = e^{\int f(x) dx} \quad u dy + u y f(x) = d[y e^{\int f(x) dx}] \quad \text{d'où:}$$

$$y e^{\int f(x) dx} + \int q(x) e^{\int f(x) dx} dx = Cte \quad \text{On a } y \text{ par 2 quadratures.}$$

(voir autre méthode, page 17.)

III. Equation de Bernoulli: $\frac{dy}{dx} + y \varphi(x) + y^m f(x) = 0$

On divise par y^m : $\frac{1}{y^m} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{m-1}} \varphi(x) + f(x) = 0$

On pose: $\frac{1}{y^{m-1}} = z$; on est ramené à une équation linéaire (II.)

IV. Equation de Riccati dont on connaît une solution particulière y_1 :

$$\frac{dy}{dx} + y^2 \varphi(x) + y \psi(x) + f(x) = 0$$

Se ramène à une équation de Bernoulli en posant: $y = y_1 + z$.

V. Equation s'intégrant par différentiation: $f(x, y, p) = 0$ $p = \frac{dy}{dx}$.

Résolvons par rapport à y :

$$y = \varphi(x, p)$$

Différentions par rapport à x :

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

On peut intégrer cette équation du 1^{er} ordre en p , on aura:

$$p = \psi(x, C) \quad \text{d'où:} \quad y = \varphi[x, \psi(x, C)] \quad (2)$$

Il faut démontrer qu'on obtient ainsi l'intégrale générale de l'éq proposée.

Différencions (2): $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{d\psi}{dx}$

Or ψ est une intégrale de (1), donc:

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{d\psi}{dx}$$

Donc: $\psi = p$, $y = \varphi(x, \psi) = \varphi(x, p)$ c. q. f. d.

- Autre méthode: Résolvons par rapport à x : $x = \varphi(y, p)$

Différencions par rapport à x :

$$1 = p \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{dp}{dx}$$

$$\text{ou:} \quad 1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} p + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{dp}{dy} p$$

équation du 1^{er} ordre en p fonction de y ; si on sait l'intégrer, on a:

$$p = f(y, C)$$

d'où:

$$x = \varphi[y, f(y, C)]$$

- La variable n'étant pas spécifiée, on peut intervertir x et y ds les 2 méthodes.

VI. Equation semi-homogène:

$$f(x, y, y') = 0$$

On suppose qu'on puisse trouver un nombre α tel que l'on ait identiq^t:

$$f(x, x^\alpha, x^{\alpha-1}) = x^\alpha f(1, 1, 1)$$

On effectue le changement de variables: $x = e^t$ $y = x^\alpha u$
 u est considéré comme fonction de t : $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ $\frac{du}{dt} = u'$.

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} u + x^\alpha \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = x^{\alpha-1} (u + u')$$

Substitutions:

$$f(x, x^\alpha u, x^{\alpha-1} (u + u')) = x^\alpha f(1, u, u + u')$$

On est ramené à l'équation linéaire: $f(1, u, u + u') = 0$

qui ne contient que u et $\frac{du}{dt}$; on résout par rapport à u' (I.)

On a t en fonction de u ; on substitue: $t = L(x)$ $u = \frac{y}{x^\alpha}$.

— Si aucune des méthodes précédentes n'est applicable, on cherche à décomposer l'équation en 2 membres qui soient différentielles exactes —

Quand l'équation est du 2^e degré en y' , on la résout par rapport à y' .

— Solutions singulières. Soit l'éq: $f(x, y, p) = 0$

A chaque couple de valeurs de (x, y) correspondent en général m valeurs distinctes de p déterminées par cette équation, et constituant les m branches d'une fonction algébrique (m degré de f en p)

Considérons un point (x_0, y_0) au lieq. à une racine double en p .

Au voisinage de ce point, la théorie générale de l'équation linéaire tombe en défaut, car elle suppose que p est une fonction uniforme.

Éliminons p entre les 2 éq:

$$f(x, y, p) = 0 \quad (1) \quad \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad (2)$$

on obtient une nouvelle équation:

$$R(x, y) = 0 \quad (3)$$

qui définit une fonction y de x ; elle représente une courbe C qui est le lieu des points du plan où l'éq (1) propose a des racines multiples en p . Il s'agit de savoir si la courbe C est, en totalité ou en parties, une intégrale de l'équation (1). Une telle intégrale est dite singulière. On va donner le moyen de reconnaître et de trouver l'intégrale singulière, quand elle existe. On démontre que tout point de la courbe C pour lequel x, y a le coefficient angulaire y' de la courbe en ce point ne vérifiant pas l'éq (1) est un point de rebroussement d'une intégrale ordinaire. Donc toute partie de la courbe C qui n'est pas une intégrale singulière est un lieu des points de rebroussement des intégrales ordinaires (1).

Théorème. Pour qu'il existe une intégrale singulière de l'équation (1), il faut et il suffit que les 3 équations:

$$(4) \quad f(x, y, \lambda) = 0 \quad (5) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad (6) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

puissent être vérifiées identiquement par 2 fonctions y et λ de x :

$$y = \varphi(x)$$

$$\lambda = \psi(x)$$

L'intégrale singulière est précisément:

$$y = \varphi(x).$$

En effet supposons qu'on ait identiquement (quel que soit x):

$$(7) \quad f(x, \varphi, \psi) = 0 \quad (8) \quad \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0 \quad (9) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \psi = 0$$

On va démontrer l'identité:

$$\psi = \frac{d\varphi}{dx}$$

d'où:

$$f(x, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}) = 0$$

ce qui démontre le théorème.

Différencions l'identité (7):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dx} = 0$$

En vertu de (8):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad (10)$$

(à moins que $\frac{d\psi}{dx}$ ne soit infini pour toute valeur de x ; dans ce cas, le théorème tomberait en défaut, et il faudrait vérifier par une substitution directe si φ est une intégrale de l'équation (1).)

(1) Au contraire, toute intégrale singulière est l'enveloppe des intégrales ordinaires (y' est le même.)

Retraçons (10) de (9):

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} \left(\psi - \frac{d\varphi}{dx} \right) = 0$$

Or: $\frac{\partial f}{\partial \varphi} \neq 0$ Donc:

$$\psi = \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Exemple: Equation de Clairaut. Une courbe est définie par une propriété de sa tangente indépendante du point de contact. Quelle est la forme de l'équation différentielle de cette courbe? — Eq. de la tangente:

$$Y - y = p(X - x)$$

$$Y = pX + y - px$$

La propriété s'exprime par une relation entre ses coefficients:

$$f(p, y - px) = 0$$

Résolvons par rapport à $y - px$:

$$y - px = \varphi(p)$$

Intégrons par différentiation:

$$y = px + \varphi(p)$$

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dp}{dx}$$

$$\left[x + \varphi'(p) \right] \frac{dp}{dx} = 0$$

Or: $x + \varphi'(p) \neq 0$

Donc:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad p = C$$

$$y = Cx + \varphi(C)$$

équation d'un droit dépendant d'un paramètre. On retrouve les tangentes des mêmes, car elles jouissent de la propriété indiquée: ce sont les intégrales ordinaires. La courbe cherchée est l'enveloppe des intégrales ordinaires, c'est-à-dire l'intégrale singulière. Cherchons-la.

$$f(\lambda, y - \lambda x) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial (y - \lambda x)} (-x) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial (y - \lambda x)} (-\lambda) + \frac{\partial f}{\partial (y - \lambda x)} \lambda = 0$$

La dernière eq. est une identité. Il existe donc toujours 2 fonctions y, λ vérifiant les 2 premières. Résolvons les par rapport à y et λ . La solution singulière s'obtiendra en éliminant le paramètre λ entre ces 2 eq.

$$y = \lambda x + \varphi(\lambda)$$

$$x + \varphi'(\lambda) = 0$$

d'où les équations:

$$x = -\varphi'(\lambda)$$

$$y = -\lambda \varphi'(\lambda) + \varphi(\lambda)$$

qui définissent la courbe cherchée au moyen du paramètre λ .

— Equations différentielles d'ordre supérieur au 4^e. On cherche à les abaisser.
Méthodes d'abaissement:

I. La variable indépendante manque: $f(y, y', y'', \dots, y^m) = 0$

On prend y pour nouvelle variable, $y' = p$ pour nouvelle fonction:
 $y'' = \frac{dp}{dy} p$ $y''' = \frac{d^2p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p$ etc. On obtient:

$$F(y, p, p', p'', \dots, p^{m-1}) = 0$$

Si l'on peut intégrer cette eq. de l'ordre $(m-1)$, on trouve:

$$p = \varphi(y) \quad \text{donc:} \quad x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} \quad \text{par une quadrature.}$$

II. La fonction manque: $f(x, y^p, y^{p+1}, \dots, y^m) = 0$

On prend pour nouvelle fonction la dérivée la plus basse: $y^p = u$;
on obtient: $f(x, u, u', u'', \dots, u^{m-p}) = 0$

équation d'ordre $(m-p)$. Si l'on sait l'intégrer, on aura y
par p quadratures: $u = \varphi(x)$ $y^{p-1} = \int \varphi(x) dx \dots$

III. Equation semi-homogène: $f(x, y, y', y'', \dots, y^m) = 0$

On suppose qu'on puisse trouver un nombre κ tel qu'on ait identiquement:
 $f(x, x^\kappa, x^{2\kappa}, x^{3\kappa}, \dots, x^{m\kappa}) = x^\kappa f(1, 1, 1, 1, \dots, 1)$

On fait alors le changement de variables: $x = e^t$ $y = x^\kappa u$
 t étant la nouvelle variable, u la nouvelle fonction: $u' = \frac{du}{dt}$

$$y' = x^{\kappa-1}(\kappa u + u') \quad y'' = x^{\kappa-2}(\kappa(\kappa-1)u + (2\kappa-1)u' + u'') \dots \text{etc.}$$

y^p contient en facteur: $x^{\kappa p}$ — L'équation devient, en supprimant

$$\text{le facteur } x^\kappa: f(1, u, \kappa u + u', \kappa(\kappa-1)u + (2\kappa-1)u' + u'', \dots) = 0$$

$$\text{ou: } F(u, u', u'', \dots, u^m) = 0$$

qui ne contient pas t et qu'on
abaisse par la méthode (I.)

Equations différentielles linéaires.

Une équation différentielle linéaire d'ordre m est de la forme :

$$A_0 \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + A_{m-1} \frac{dy}{dx} + A_m y = B$$

A_0, A_1, \dots, A_m, B étant des fonctions de x seulement. Posons :

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m = f(x)$$

Considérons le symbole opératif :

$$A_0 \frac{d^m}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + A_{m-1} \frac{d}{dx} + A_m$$

On peut l'écrire, pour abréger :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)$$

et le multiplier par la fonction à laquelle il s'applique, c'à d. ajouter la lettre y dans chaque terme comme un facteur. L'équation linéaire pourra s'écrire symboliquement :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = B$$

Propriétés de ce symbole : 1° $f\left(\frac{d}{dx}\right)(y+z) = f\left(\frac{d}{dx}\right)y + f\left(\frac{d}{dx}\right)z$.

2° $f\left(\frac{d}{dx}\right)(y+C) = f\left(\frac{d}{dx}\right)y + A_m C$ (cas particulier de 1°)

3° $f\left(\frac{d}{dx}\right)Cy = Cf\left(\frac{d}{dx}\right)y$ (cas particulier de 1°)

4° $f\left(\frac{d}{dx}\right)yz = z f\left(\frac{d}{dx}\right)y + \frac{dz}{dx} f'\left(\frac{d}{dx}\right)y + \dots + \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} f^{(m-1)}\left(\frac{d}{dx}\right)y + \frac{dz}{dx} f^{(m)}\left(\frac{d}{dx}\right)y$

Théorème : étant donnée l'éq. linéaire :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = B$$

si l'on en connaît une solution particulière y_1 , on est ramené à résoudre l'équation homogène (sans second membre) :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0$$

En effet, posons : $y = y_1 + z$ z nouvelle fonction inconnue :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)(y_1 + z) = f\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + f\left(\frac{d}{dx}\right)z = B \quad \text{Or : } f\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 = B$$

Donc z vérifie l'équation :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)z = 0$$

Equations linéaires homogènes.

Définition. Etant donnée l'éq. linéaire homogène:

(d'ordre m)

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0$$

on appelle système fondamental d'intégrales un système de m intégrales:

telles que le déterminant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ y_1' & y_2' & \dots & y_m' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \dots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Théorème. L'intégrale générale de cette équation est alors:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m$$

C_1, C_2, \dots, C_m étant m constantes arbitraires.

Il suffit de démontrer que, y étant une intégrale quelconque de cette eq. il existe une relation de cette forme entre y et les m intégrales du système fondamental. Écrivons que ces $(m+1)$ fonctions vérifient l'équation:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0 \quad f\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 = 0 \quad f\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 = 0 \quad \dots \quad f\left(\frac{d}{dx}\right)y_m = 0$$

On peut considérer ces identités comme $(m+1)$ équations linéaires entre les $(m+1)$ inconnues: $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$. Comme elles ne sont pas toutes nulles, il faut que le déterminant complet de leurs coefficients soit identiquement nul:

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ y' & y_1' & y_2' & \dots & y_m' \\ y'' & y_1'' & y_2'' & \dots & y_m'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(m)} & y_1^{(m)} & y_2^{(m)} & \dots & y_m^{(m)} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Cela prouve qu'il existe une même relation linéaire et homogène entre les éléments de chaque ligne, c'est-à-dire qu'on a les $(m+1)$ équations:

$$\lambda y + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_m y_m = 0$$

$$\lambda y' + \lambda_1 y'_1 + \lambda_2 y'_2 + \dots + \lambda_m y'_m = 0$$

$$\lambda y^m + \lambda_1 y_1^m + \lambda_2 y_2^m + \dots + \lambda_m y_m^m = 0$$

D'ailleurs: $\lambda \geq 0$, car c'est le mineur relatif à y^m ; $\lambda = \Delta \geq 0$, par hypothèse. On peut donc diviser par λ et écrire:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m$$

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \dots + C_m y'_m$$

$$y^m = C_1 y_1^m + C_2 y_2^m + \dots + C_m y_m^m$$

Reste à prouver que les nouveaux coefficients C_1, C_2, \dots, C_m (quotients de $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ par $-\lambda$) sont des constantes. Différencions chacune des m premières identités en tenant compte de la suivante:

$$0 = C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_m y_m$$

$$0 = C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_m y'_m$$

$$0 = C'_1 y_1^{m-1} + C'_2 y_2^{m-1} + \dots + C'_m y_m^{m-1}$$

On a ainsi un système de m équations à m inconnues dont le déterminant est: $\Delta \geq 0$.

On doit donc avoir identiquement:

$$C'_1 = 0 \quad C'_2 = 0 \quad \dots \quad C'_m = 0 \quad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire: L'intégration d'une équation linéaire homogène se ramène à la recherche d'un système fondamental d'intégrales.

Théorème: Si: y_1, y_2, \dots, y_m forment un système fondamental, et si le déterminant:

$$R = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} \end{vmatrix}$$

dont les éléments sont m^2 constantes arbitraires, n'est pas nul les m fonctions suivantes:

$$Z_1 = C_{11} y_1 + C_{12} y_2 + \dots + C_{1m} y_m$$

$$Z_2 = C_{21} y_1 + C_{22} y_2 + \dots + C_{2m} y_m$$

$$Z_m = C_{m1} y_1 + C_{m2} y_2 + \dots + C_{mm} y_m$$

forment un nouveau système fondamental. En effet, si l'on forme le déterminant Δ' de ces m fonctions et de leurs $(m-1)$ premiers dérivés, on trouve : $\Delta' = R\Delta$ donc : $\Delta' \neq 0$.

Covolaire : Il y a une infinité de systèmes fondamentaux.

Théorème : Si l'on connaît une intégrale y_1 d'une équation linéaire homogène, on peut abaisser son ordre d'une unité.

Posons : $y = y_1 z$

z est la nouvelle fonction inconnue.

On a la nouvelle équation :

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 z = 0$$

Or le coefficient de z dans cette équation linéaire par rapport à z est :

$f\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 = 0$ par hypothèse ; donc l'équation ne contient pas la fonction inconnue, et l'on peut l'abaisser en posant : $z' = u$ (méthode II.)

Si u est l'intégrale générale de la nouvelle équation linéaire d'ordre $(m-1)$ l'intégrale générale de la proposée sera : $y = y_1 \int u dx$

De même, si l'on connaît une solution particulière de l'équation d'ordre $(m-1)$ on pourra l'abaisser par le même procédé, et ainsi de suite ; si l'on peut arriver ainsi jusqu'à l'ordre 1, qu'on sait intégrer, on aura m solutions particulières : y_1, y_2, \dots, y_m ; on peut démontrer qu'elles forment un système fondamental.

Revenons aux équations linéaires complexes, non homogènes -

Théorème : Lorsqu'on connaît l'intégrale générale d'une équation sans second membre, on obtient l'intégrale générale de l'équation avec 2^e membre par m quadratures (Méthode de la variation des constantes arbitraires.)

Soit l'équation non homogène:

$$H \frac{d}{dx} y = B \quad (1)$$

et soient :

 y_1, y_2, \dots, y_m

un système fondamental de

Équation homogène correspondante:

$$H \left(\frac{d}{dx} \right) y = 0$$

Cherchons une solution particulière de l'éq. (1) de la forme suivante:

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_m y_m$$

$y = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2$ étant m fonctions de x . Comme on introduit m fonctions nouvelles, on peut les assujettir à $(m-1)$ relations arbitraires; elles équivaudront à une seule fonction qui sera déterminée par l'équation (1). Choisissons donc ces m fonctions de telle sorte que les $(m-1)$ premières dérivées de y soient les mêmes que si u_1, u_2, \dots, u_m étaient des constantes; on a $(m-1)$ conditions:

$$(2) \begin{cases} u_1 y_1 + u'_2 y_2 + \dots + u_m y_m = 0 \\ u_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + \dots + u'_m y'_m = 0 \\ \vdots \\ u_1 y^{(m-2)}_1 + u'_2 y^{(m-2)}_2 + \dots + u'^{(m-2)}_m y^{(m-2)}_m = 0 \end{cases}$$

Cherchons une dernière relation qui exprime que y est une intégrale :

or on a identiquement:

$$H \frac{d}{dx} y = A_0 \frac{d^m y}{dx^m} + f\left(\frac{d}{dx}\right) y$$

Si f est une expression linéaire en y d'ordre $(m-1)$; on a donc :

$$f_1\left(\frac{d}{dx}\right)y = u_1 f_1\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + u_2 f_1\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 + \dots + u_m f_1\left(\frac{d}{dx}\right)y_m$$

D'autre part:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d}{dx} (u_1 y_1^{m-1} + u_2 y_2^{m-1} + \dots + u_n y_n^{m-1}) =$$

$$u_1 y_1^m + u_2 y_2^m + \dots + u_m y_m^m + u_1' y_1^{m-1} + u_2' y_2^{m-1} + \dots + u_m' y_m^{m-1}$$

Done: $f\left(\frac{d}{dx}\right)y = A_0(u_1'y_1^{m-1} + u_2'y_2^{m-1} + \dots + u_m'y_m^{m-1}) + u_1'f\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + u_2'f\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 + \dots + u_m'f\left(\frac{d}{dx}\right)y_m$

Or les coefficients de u_1, u_2, \dots, u_m sont nuls par hypothèse; la condition pour

On les coefficients de u_1, u_2, \dots, u_m dans A_0 sont des fonctions de y qui soit intégrales se réduit à: $A_0(u_1 y_1^{m-1} + u_2 y_2^{m-1} + \dots + u_m y_m^{m-1}) = B$ (3)

Cette eq (3) jointe aux eq. (2) forme un système de m équations linéaires qui déterminent les m inconnues: u_1, u_2, \dots, u_m

Elles admettent un système de solutions, et un seul, car le déterminant des coefficients des inconnues est: $A_0 \Delta \neq 0$.

En les résolvant, on obtiendra: $u_1' = q_1(x), \dots, u_m' = q_m(x)$

On aura un intégral particulier en prenant:

$$u_1 = \int q_1 dx \quad u_2 = \int q_2 dx \quad \dots \quad u_m = \int q_m dx$$

Il suffira de lui ajouter l'intégrale générale de l'équation homogène pour avoir l'intégrale générale de l'eq. (1); mais cela revient à faire figurer dans

u_1, u_2, \dots, u_m une constante arbitraire de intégration. On a donc bien m constantes arbitraires dans l'intégrale générale.

— Application à l'équation du 1^{er} ordre: $\frac{dy}{dx} + y f(x) + \varphi(x) = 0$

Equation sans second membre: $\frac{dy}{dx} + y f(x) = 0$

$$\frac{dy}{y} = -f(x) dx \quad \text{Intégrale:} \quad y = C e^{-\int f(x) dx}$$

Pour avoir un intégral particulier de l'équation complète, supposons C fonction de x :

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int f(x) dx} + \varphi(x) = 0$$

d'où en intégrant:

$$C = - \int \varphi(x) e^{\int f(x) dx} dx$$

Intégrale générale:

$$y = - e^{-\int f(x) dx} \int \varphi(x) e^{\int f(x) dx} dx$$

La constante d'intégration est contenue dans la 2^e quadrature; celle de la 1^{re} quadrature $\int f(x) dx$ s'élimine d'elle-même: car le facteur e^k contenu dans la 2^e quadrature est détruit par le facteur correspondant e^{-k} qui provient de la 1^{re} exponentielle.

Equation linéaire à coefficients constants.

Pour avoir un système fondamental, on cherche des intégrales de la forme:

$y = e^{rx}$ d'où: $y' = r e^{rx}$ $y'' = r^2 e^{rx}$ $y^{(m)} = r^m e^{rx}$

On a identiquement: $f(r) e^{rx} = e^{rx} f(r)$

Pour que e^{rx} soit une intégrale de l'éq. homogène: $f(r) y = 0$,

il faut et il suffit que r soit racine de l'équation: $f(r) = 0$

algébrique du degré m , qu'on appelle équation caractéristique.

1^{er} Cas. — L'équation caractéristique a ses m racines distinctes:

soient: r_1, r_2, \dots, r_m

Dans ce cas, les exponentielles:

$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_m x}$ forment un système fondamental.

En effet, le déterminant de ces m intégrales est:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \dots & e^{r_m x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \dots & r_m e^{r_m x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{m-1} e^{r_1 x} & r_2^{m-1} e^{r_2 x} & \dots & r_m^{m-1} e^{r_m x} \end{vmatrix} = e^{rx} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{m-1} & r_2^{m-1} & \dots & r_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant (dit. de Van der Monde) est égal au produit:

$\pm \prod (r_i - r_k)$ où r_i et r_k sont les m racines prises 2 à 2

Comme par hypothèse elles sont toutes distinctes, ce déterminant n'est pas nul; donc: $\Delta \neq 0$. L'intégrale générale de l'éq. homogène

est donc:
$$\sum_{k=1}^{K=m} C_k e^{r_k x}$$

2^e Cas. — Soit r une racine multiple d'ordre p de l'éq. caractéristique.

On va prouver que: $e^{rx}, x e^{rx}, x^2 e^{rx}, \dots, x^{p-1} e^{rx}$

sont p intégrales de l'équation proposée. Cela est d'ailleurs évident pour e^{rx} .

Il suffit de prouver que $x^k e^{rx}$ est une intégrale, pour $k=1, 2, \dots, p-1$.

Or si:

$$y = x^k e^{rx}$$

$$y' = x^k r e^{rx} + k x^{k-1} e^{rx}$$

$$y'' = x^k r^2 e^{rx} + 2kr x^{k-1} e^{rx} + k(k-1) x^{k-2} e^{rx}$$

$$y''' = x^k r^3 e^{rx} + 3kr^2 x^{k-1} e^{rx} + 3k(k-1)r x^{k-2} e^{rx} + k(k-1)(k-2) x^{k-3} e^{rx}$$

$$y^{(k)} = x^k r^k e^{rx} + \frac{k}{1} x^{k-1} k r^{k-1} e^{rx} + \frac{k(k-1)}{1.2} x^{k-2} k(k-1) r^{k-2} e^{rx} + \dots + k! e^{rx}$$

Les dérivées suivantes n'ont que $(k+1)$ termes, comme $y^{(k)}$. Formons:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = x^k e^{rx} f(r) + k x^{k-1} e^{rx} f'(r) + k(k-1) x^{k-2} e^{rx} f''(r) + \dots + k! e^{rx} f^{(k)}(r)$$

On voit que pour $k \leq p-1$, cette expression est identiquement nulle, puisque par hypothèse: $f(r)=0, f'(r)=0, f''(r)=0, \dots, f^{(p-1)}(r)=0$.

On a donc p intégrales distinctes pour chaque racine d'ordre p . On peut résumer ce résultat en disant que si x est une racine d'ordre p ,

$e^{rx} P(x)$ est une intégrale de l'éq. homogène, P désignant le polynôme le plus général du degré $(p-1)$, et contenant ensuite p constantes arbitraires; car cela équivaut à faire la somme des p intégrales particulières en affectant chacune d'elles d'un coefficient arbitraire:

$$C_0 e^{rx} + C_1 x e^{rx} + C_2 x^2 e^{rx} + \dots + C_{p-1} x^{p-1} e^{rx} = e^{rx} P(x)$$

Puisque qu'à chaque racine d'ordre p de l'équation caractéristique correspondent p intégrales distinctes, l'équation d'ordre m aura toujours m intégrales distinctes, et son intégrale générale sera de la forme

$$\sum e^{rx} P(x)$$

avec m constantes arbitraires, la somme étant étendue à toutes les racines de l'éq. caractéristique. (On démontrerait que ces m intégrales forment un système fondamental.) Ainsi, dans tous les cas, on obtient l'intégrale générale de l'éq. homogène en résolvant l'éq. algébrique: $f(r)=0$.

Remarque pour le cas des racines imaginaires - Supposons que l'éq. ^(caractéristique) admette une racine imaginaire d'ordre p : $z = \alpha + \beta i$

$f(x)$ ayant ses coefficients réels, il admet aussi la racine conjuguée:

$\alpha - \beta i$ au même ordre p de multiplicité. L'intégral général contiendra les 2 termes suivants: $e^{(\alpha + \beta i)x} P(x) + e^{(\alpha - \beta i)x} P_1(x)$

Pour les transformer en une expression réelle, il faut que ces 2 termes soient des quantités imaginaires conjuguées; prenons par exemple 2 termes correspondants: $C_k x^k e^{(\alpha + \beta i)x} + C'_k x^k e^{(\alpha - \beta i)x}$

Posons: $C_k = \gamma_k + i\delta_k$ $C'_k = \gamma_k - i\delta_k$

nous substituons ainsi aux constantes C les constantes réelles γ_k, δ_k .

La somme devient: $x^k e^{\alpha x} [\gamma_k (e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}) + i\delta_k (e^{\beta i x} - e^{-\beta i x})]$

ou: $x^k e^{\alpha x} [2\gamma_k \cos \beta x - 2\delta_k \sin \beta x]$ sous forme réelle

ou plus simplement: $x^k e^{\alpha x} (\Gamma_k \cos \beta x + \Delta_k \sin \beta x)$

En ajoutant les termes semblables correspondant aux diverses valeurs de k , on obtient l'intégral général sous forme réelle:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x Q(x) + e^{\alpha x} \sin \beta x Q_1(x)$$

Q, Q_1 étant 2 polynômes de degré $(p-1)$ à coefficients arbitraires.

Résumé. Pour avoir l'intégral général de l'équation homogène à coefficients constants: $f(x) y = 0$

on résout l'équation caractéristique: $f(x) = 0$ et l'on forme:

$$\sum e^{rx} P(x) + \sum e^{\alpha x} [\cos \beta x Q(x) + \sin \beta x Q_1(x)]$$

z désignant une racine réelle, P un polynôme de degré $(p-1)$; $(\alpha + \beta i)$, $(\alpha - \beta i)$ 2 racines imaginaires conjuguées d'ordre q ; Q, Q_1 2 polynômes de degré $(q-1)$. En particulier, si p ou $q = 1$, le polynôme se réduit à une constante.

Equation linéaire à coefficients constants, non homogène: $f\left(\frac{d}{dx}\right)y = B$.
 En général, on trouve une intégrale particulière de cette équation par la méthode de la variation des constantes arbitraires.

Cas particuliers où l'on peut trouver une intégrale particulière:

1° B est une constante. On a l'intégrale particulière (constante):

$$y = \frac{B}{A_m} \quad \text{car: } y' = 0 \quad y'' = 0 \quad \dots \dots \dots A_m y = B.$$

2° $B = e^{ax} P(x)$ P polynôme en x . Deux cas:

A. a n'est pas racine de l'équation caractéristique. On cherche alors une intégrale de la forme: $e^{ax} Q(x)$

Q étant un polynôme de même degré que P . — Substituons:

$$y = e^{ax} Q(x)$$

$$y' = ae^{ax} Q + e^{ax} Q'$$

$$y^k = a^k e^{ax} Q + \frac{k}{1} a^{k-1} e^{ax} Q' + \frac{k(k-1)}{1.2} a^{k-2} e^{ax} Q'' + \dots$$

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)e^{ax} Q(x) = e^{ax} [Q(x)f(a) + Q'f'(a) + Q''f''(a) + \dots + Q^{pp}f^{pp}(a)]$$

p étant le degré commun de P et de Q . — Pour que $e^{ax} Q(x)$ soit une intégrale, il faut et il suffit qu'on ait identiquement:

$$Q(x)f(a) + Q'f'(a) + Q''f''(a) + \dots + Q^{pp}f^{pp}(a) = P(x)$$

Or Q contient $(p+1)$ coefficients arbitraires. En égalant les coefficients de la même puissance de x dans les 2 membres, on obtiendra $(p+1)$ équations du 1^{er} degré qui détermineront ces $(p+1)$ coefficients.

On peut affirmer que le polynôme Q sera toujours déterminé par ces équations, car on peut les résoudre successivement, la 1^{re} ne contenant qu'une inconnue, et chacune des suivantes n'en contenant qu'une nouvelle. Soit le polynôme donné: $P(x) = \alpha_0 x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \dots + \alpha_{p-1} x + \alpha_p$

Pour le polynôme cherché; $Q(x) = C_0 x^p + C_1 x^{p-1} + \dots + C_{p-1} x + C_p$

Égalons les coefficients de x^p ;

$$C_0 f(a) = \alpha_0$$

et comme par hypothèse: $f(a) \neq 0$,

$$C_0 = \frac{\alpha_0}{f(a)}$$

Égalons les coefficients de x^{p-1} ;

$$C_1 f(a) + p C_0 f'(a) = \alpha_1$$

et portons dans cette équation la valeur trouvée pour C_0 . Comme $f(a) \neq 0$, on en tirera C_1 ; on portera C_0 et C_1 dans la suivante:

$$C_2 f(a) + (p-1) C_1 f'(a) + p(p-1) C_0 f''(a) = \alpha_2$$

d'où C_2 , et ainsi de suite jusqu'à C_p , le coefficient de la nouvelle inconnue étant toujours $f(a)$.

On peut aussi remarquer (ce qui revient au même) que si l'on forme le déterminant des coefficients de $C_0, C_1, C_2, \dots, C_p$, il se réduit à sa diagonale, car tous les éléments situés au-dessus sont nuls. Tous les éléments de la diagonale étant égaux à $f(a)$, le déterminant a pour valeur:

$$[f(a)]^{p+1} \neq 0.$$

B. a est une racine de l'ordre K de l'équation caractéristique. On a.

$$f(a) = 0 \quad f'(a) = 0 \quad \dots \quad f^{K-1}(a) = 0$$

On cherche une intégrale de la forme:

$$Q(x) e^{ax} = e^{ax} [Q(x) f(a) + Q'(x) f'(a) + \dots + Q^{K-1}(x) f^{K-1}(a) + Q^K(x) f^K(a) + \dots + Q^{p+K}(x) f^{p+K}(a)]$$

Or, par hypothèse, tous les termes de la 1^{re} ligne sont nuls; il reste la 2^e ligne. Pour que $e^{ax} Q(x)$ soit une intégrale, il faut et il suffit qu'on ait:

$$Q^K f^K(a) + Q^{K+1} f^{K+1}(a) + \dots + Q^{p+K} f^{p+K}(a) = P(x)$$

Cette identification est possible, car le 1^{er} membre est du degré p au plus.

En supposant que $P(x)$ a la même forme que plus haut, et que le polynôme cherché est:

$$Q(x) = C_0 x^{p+k} + C_1 x^{p+k-1} + \dots + C_p x^k + C_{p+1} x^{k-1} + \dots + C_{p+k-1} x + C_{p+k}$$

on a, en égalant les coefficients de x^p dans les 2 membres:

$$(p+k)(p+k-1)\dots(p+1) C_0 f^k(a) = \alpha_0$$

et comme par hypothèse, $f^k(a) \neq 0$, on tire de cette équation une valeur bien déterminée de C_0 ; on calcule ensuite de proche en proche C_1, C_2, \dots, C_p . Les autres coefficients: C_{p+1}, \dots, C_{p+k} restent indéterminés; en effet:

$$e^{ax} \left[C_{p+1} x^{k-1} + C_{p+2} x^{k-2} + \dots + C_{p+k-1} x + C_{p+k} \right]$$

est une intégrale de l'équation sans second membre, avec K constantes arbitraires. On voit qu'il suffit de chercher un polynôme Q de degré $(p+k)$ et dont le terme de moindre degré soit du degré K .

Dans tous les cas, on obtient une intégrale particulière en résolvant $(p+1)$ équations du 1^{er} degré, et sans quadratures.

— Cas particulier: Si $a = 0$, $B = P(x)$.

Il faut chercher une intégrale de la forme: $y = Q(x)$

Q étant un polynôme de degré $(p+k)$, p étant le degré de P , et K l'ordre de multiplicité de la racine 0 dans l'équation caractéristique.

— Théorème: Étant donnée l'éq: $f\left(\frac{d}{dx}\right)y = B_1 + B_2 + B_3$

si y_1, y_2, y_3 sont 3 intégrales particulières respectives des 3 éq:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = B_1 \quad f\left(\frac{d}{dx}\right)y = B_2 \quad f\left(\frac{d}{dx}\right)y = B_3$$

$y_1 + y_2 + y_3$ est une intégrale particulière de l'éq. proposée.

En effet, $f\left(\frac{d}{dx}\right)(y_1 + y_2 + y_3) = f\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + f\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 + f\left(\frac{d}{dx}\right)y_3 = B_1 + B_2 + B_3$.

Application. Soit à trouver une intégrale particulière de l'équation:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = e^{a_1 x} P_1(x) + e^{a_2 x} P_2(x) + e^{a_3 x} P_3(x)$$

Il suffit de chercher 3 intégrales particulières des 3 équations :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dx}\right)y = e^{a_1 x} P_1(x) \quad \mathcal{L}\left(\frac{d}{dx}\right)y = e^{a_2 x} P_2(x) \quad \mathcal{L}\left(\frac{d}{dx}\right)y = e^{a_3 x} P_3(x)$$

et d'en faire la somme.

— Cherchons, par cette méthode, une intégrale particulière de l'équation :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dx}\right)y = e^{\alpha x} \cos \beta x \cdot P(x) = \frac{1}{2} e^{(\alpha + \beta i)x} P(x) + \frac{1}{2} e^{(\alpha - \beta i)x} P(x)$$

On est ramené à chercher une intégrale particulière de chacune des 2 eq :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dx}\right)y = \frac{1}{2} e^{(\alpha + \beta i)x} P(x) \quad \mathcal{L}\left(\frac{d}{dx}\right)y = \frac{1}{2} e^{(\alpha - \beta i)x} P(x)$$

Soit : $e^{(\alpha + \beta i)x} Q(x)$ une intégrale particulière de la 1^{re}, il est évident que : $e^{(\alpha - \beta i)x} Q_1(x)$ sera une intégrale particulière de la 2^e, Q_1 étant le polynôme conjugué de Q (par le changement de $+i$ en $-i$.)

L'intégrale de l'éq proposée sera : $e^{(\alpha + \beta i)x} Q(x) + e^{(\alpha - \beta i)x} Q_1(x)$

qui peut se mettre sous la forme : $e^{\alpha x} \cos \beta x R(x) + e^{\alpha x} \sin \beta x R_1(x)$

R provenant de la réunion des termes réels de Q et Q_1 , et R_1 de la réunion des termes imaginaires.

Il en serait de même si on avait : $B = e^{\alpha x} \sin \beta x \cdot P_1(x)$

Conclusion : Dans le cas où : $B = e^{\alpha x} \cos \beta x P(x) + e^{\alpha x} \sin \beta x P_1(x)$

on cherche une intégrale particulière de la forme :

$$e^{\alpha x} \cos \beta x R(x) + e^{\alpha x} \sin \beta x R_1(x)$$

où R et R_1 sont 2 polynômes de degré $(p+k)$, p étant le degré le plus élevé des 2 polynômes P et P_1 , et k l'ordre de multiplicité de la racine $(\alpha + \beta i)$ dans l'équation caractéristique.

Comme précédemment, on pourra négliger dans R, R_1 les termes de degré inférieur à k , qui figurent dans l'intégrale générale de l'éq. sans 2^e membre.

Type se ramenant à l'équation linéaire à coefficients constants :

$$A_0(ax+b)^m \frac{d^m y}{dx^m} + A_1(ax+b) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + A_{m-1}(ax+b) \frac{dy}{dx} + A_m y = 0$$

On fait d'abord le changement de variable, $ax+b = x$

$$A_0 x^m \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 x^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + A_{m-1} x \frac{dy}{dx} + A_m y = 0$$

Le nouveau type se transforme à toujours en posant : $x = e^z$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} \quad \dots$$

En général, $\frac{d^k y}{dx^k}$ est égale à une fonction linéaire de y et de ses dérivées par rapport à z , divisée par x^k . En faisant la substitution, on obtient une équation linéaire à coefficients constants.

On peut se dispenser d'effectuer cette transformation, et traiter directement l'équation. — Dans l'équation transformée, on doit chercher des intégrales de la forme : e^{xz} , c'est en remontant à l'ancienne

variable x , de la forme : x^z . En substituant directement, on trouve : $f\left(\frac{d}{dx}\right) x^z = [A_m + A_{m-1}z + A_{m-2}z(z-1) + \dots + A_0z(z-1)\dots(z-m+1)] x^m$

L'équation caractéristique en z est donc :

$$A_0 z(z-1)\dots(z-m+1) + \dots + A_{m-2}z(z-1) + A_{m-1}z + A_m = 0$$

Soit z une racine d'ordre k de cette équation. Cette racine correspond à une intégrale de la forme : $e^{xz} [C_0 + C_1 x + \dots + C_{k-1} x^{k-1}]$ c'est en remontant à la variable x :

$$x^z [C_0 + C_1 Lx + C_2 (Lx)^2 + \dots + C_{k-1} (Lx)^{k-1}]$$

Conclusion : On forme l'éq. caractéristique comme ci-dessus, et on la résout ; l'intégrale générale de l'éq. homogène sera de la forme :

$$\sum x^z [C_0 + C_1 Lx + C_2 (Lx)^2 + \dots + C_{k-1} (Lx)^{k-1}]$$

sont étendus à toutes les racines α de cette eq. caractéristique, K désignant le degré de multiplicité de chacune d'elles.

Dans le cas particulier où l'eq. caractéristique a toutes ses racines distinctes, l'intégrale générale se réduit à un polynôme (qui n'est pas nécessairement entier ni rationnel.)

Pour trouver une intégrale particulière de l'équation avec des membres on emploie en général la méthode de variation des constantes arbitraires.

Nous avons vu que si l'eq. a coefficients constants a un 2^e membre de la forme: $e^{ax} P(x)$ elle admet une intégrale particulière

de la forme: $e^{ax} Q(x)$ Rétablissant la variable x , on voit que si le 2^e membre est de la forme:

$x^a P(tx)$
l'eq. aura une intégrale de la forme: $x^a Q(tx)$

Q étant un polynôme de degré $(p+K)$, p désignant le degré de P , K l'ordre de multiplicité de la racine a dans l'eq. caractéristique. Cela est encore vrai quand la racine a est imaginaire.

Equation aux dérivées partielles du 1^{er} ordre linéaire.

Soit une fonction inconnue z des 2 variables indépendantes x, y ;
soit l'éq: $Pp + Qq = R$ (1) où: $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

et où P, Q, R sont des fonctions données de x, y, z .

On va prouver que pour avoir l'intégrale générale de l'équation (1)
il suffit de trouver l'intégrale générale du système de 2 éq. différentielles
du 1^{er} ordre:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (2)$$

Soit en effet: $V(x, y, z) = C^{te}$ $V(x, y, z) = C^{te}$ (3)

l'intégrale générale de ce système (2). On aura, pour toutes les valeurs
de x, y, z, dx, dy, dz qui satisfont le système (2):

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0$$

ou: $P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ (4) $P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ (5)

Soit d'autre part:

$$f(x, y, z) = 0$$

une équation définissant z en fonction de x et de y , et telle
que cette fonction z soit une intégrale de l'équation (1)

On aura, en y substituant cette même fonction z et prenant
les dérivées partielles,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

On peut tirer p et q de ces équations et porter dans l'éq. (1)
qui est vérifiée identiquement par hypothèse; on trouve:

$$P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

Remarque: si l'on avait $f(x, y, z) = C^{te}$, p et q seraient les

mêmes, mais P, Q, R , ou l'on substitue z fonction de x et de y , ne seraient pas les mêmes en général, de sorte que si l'on peut partir d'une ~~eq~~ intégrale générale de la forme: $f(x, y, z) = C^te$ pour aboutir à (6), la réciproque n'est pas vraie, et l'on ne peut prendre pour intégrale générale $f(x, y, z)$ égale à une constante.)

En rapprochant (4), (5), (6), on conclut que le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

est identiquement nul,

c.à.d. qu'il existe une relation entre U, V et f , ou que f est une fonction de U et de V .

Ainsi toute intégrale de l'éq. (1) est de la forme: $F(U, V) = 0$, et réciproquement, on obtient une intégrale de l'éq. (1) en égalant à 0 une fonction quelconque de U et de V .

Le raisonnement précédent suppose que P, Q, R ne s'annulent pas à la fois. Il n'y a d'exception que si une certaine fonction φ s'annule en même temps P, Q, R . Or si P, Q, R s'annuleraient à la fois pour des valeurs de x, y, z liées par une relation:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

P, Q, R seraient divisibles par $\varphi(x, y, z)$, et l'éq. (1) contiendrait en facteur $\varphi(x, y, z)$. L'équation:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

n'est pas une intégrale proprement dite, quoique l'éq. (1) soit vérifiée quand elle-ci l'est; c'est une intégrale singulière.

Signification géométrique du système (2).

L'intégrale générale (3) de ce système est une famille de courbes dépendant de 2 constantes C, C' .

D'après le théorème précédent, on obtient une intégrale quelconque de l'éq. (1) en prenant:

$$F(U, V) = 0$$

Cela revient à dire, géométriquement, que la surface intégrale est le lieu des courbes (3) qui sont liées par la relation:

$$F(C, C') = 0$$

Plus généralement, on peut dire que toute surface intégrale est un lieu de courbes (3) et, inversement, que tout lieu de courbes (3) est une surface intégrale vérifiant l'éq. (1).

Les courbes (3) sont dites les caractéristiques de cette surface; le système (2) est le système différentiel des caractéristiques.

Cette définition géométrique des surfaces intégrales donne la solution de quelques problèmes.

I. Trouver une surface intégrale passant par une courbe donnée C .

On distinguera 2 cas:

1^{er} cas — La courbe C n'est pas une caractéristique.

Soit S la surface cherchée; c'est un lieu de caractéristiques.

Toute caractéristique I' tracée sur S devra rencontrer C . Donc la surface cherchée S est le lieu des caractéristiques qui rencontrent C .

— Voici comment on opère. Soient:

$$U = \alpha$$

$$V = \beta$$

(7)

les équations d'une caractéristique I' , et soient:

$$f(x, y, z) = 0$$

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

(8)

42
 les équations de la courbe donnée C . Il faut trouver la condition
 qu'il doit satisfaire α et β pour que la courbe Γ rencontre
 la courbe C . Pour cela, il faut et il suffit que les h équations
 (7) et (8) aient une solution commune en x, y, z . Il y a
 qu'à éliminer x, y, z entre ces h équations, et l'on trouve l'éq-
 de condition :

$$F(\alpha, \beta) = 0 \quad (9)$$

On est ainsi ramené à trouver le lieu des caractéristiques (7)
 liées par la relation (9). Ce lieu a pour équation :

$$F'(U, V) = 0$$

2^e cas — La courbe C est une caractéristique.
 Il suffit de trouver une famille de caractéristiques contenant C ,
 il y a une infinité de solutions. Si α_0, β_0 sont les paramètres
 de la courbe C , une relation arbitraire entre α et β , telle seulement
 que pour $\alpha = \alpha_0$ on ait : $\beta = \beta_0$
 fournira une solution.

II. Trouver une surface intégrale tangente à une surface
 donnée Σ le long d'une courbe.

Soit C la courbe de contact (inconnue) de la surface Σ avec
 l'intégrale S . Soit M un point de C , par M il passe une
 caractéristique contenue dans S , et par suite tangente à la surface Σ
 en M . Donc, pour trouver la surface S , il suffit de chercher le
 lieu des caractéristiques tangentes à la surface Σ , ou plutôt le
 lieu de leurs points de contact, qui est la courbe C .

Voici comment on opère pour trouver les équations de la C .
 Soit :

$$f(x, y, z) = 0 \quad (10)$$

l'équation de la surface donnée Σ . Écrivons qu'en un point (x, y, z) commun à la surface Σ et à la ~~courbe~~ ^{caractéristique} T (éq. 7) la courbe est tangente à la surface, c'est-à-dire que le déplacement (dx, dy, dz) sur T est dans le plan tangent à Σ . Or, dx, dy, dz vérifient par hypothèse les équations :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (2)$$

D'autre part, pour tout déplacement sur la surface, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

Dans, pour que le déplacement sur T soit aussi sur la surface Σ , il faut qu'on ait :

$$P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

On voit que, pour qu'en un point (x, y, z) commun à la courbe T et à la surface Σ , la courbe soit tangente à la surface, il faut que ce point vérifie l'équation (6); or, comme il vérifie aussi par hypothèse l'éq. (10), la courbe C est l'intersection des surfaces (10) et (11). Par suite, on obtiendra l'intégrale cherchée en déterminant (par le probl. I) les caractéristiques qui rencontrent cette courbe C .

Remarque. Il y a exception dans le cas où Σ serait une intégrale singulière; l'éq. (6) serait alors vérifiée identiquement; mais alors la surface donnée Σ serait l'intégrale cherchée.

Trajectoires et surfaces orthogonales.

Considérons une famille de surfaces dépendant d'un paramètre λ :

$$f(x, y, z, \lambda) = 0 \quad (1)$$

Il existe une famille de courbes dépendant de 2 paramètres et telles qu'en chacun de leurs points d'intersection avec une des surfaces (1) elles les rencontrent orthogonalement.

En effet, soit (x, y, z) le point d'intersection d'une de ces courbes et d'une des surfaces (1); (dx, dy, dz) un déplacement infiniment petit sur la courbe à partir de ce point, ~~défini par la condition~~
(d'orthogonalité est: $\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}}$ (2)

Puisque le pt. (x, y, z) est sur une surface (1), le paramètre λ doit avoir dans le système (2) une valeur ~~telle~~ qui vérifie l'éq. (1).

En éliminant λ entre (1) et (2), c-à-d. en portant dans le système (2) la valeur de λ tirée de l'éq. (1), on aura un système différentiel de la forme: $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

Son intégrale générale sera de la forme:

$$U(x, y, z) = \alpha \quad V(x, y, z) = \beta \quad (3)$$

Telle est la famille de courbes qui répond à la question.

D'autre part, il existe une infinité de surfaces dont l'équation générale dépend d'une fonction arbitraire, et telles que chacune d'elles soit orthogonale à une surface quelconque de la famille (1) en chacun de ses points d'intersection avec celle-ci.

En effet, soit (x, y, z) un point d'une des surfaces (1);
 soient $p, q, -1$, les paramètres directeurs de la normale à
 la surface orthogonale en ce point; la condition d'orthogonalité
 sera:
$$p \frac{\partial F}{\partial x} + q \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} \quad (4)$$

En intégrant cette équation aux dérivées partielles, on obtient
 une famille de surfaces dépendant d'un paramètre et répondant
 à la question.

Remarquons que pour trouver ces surfaces on est ramené à
 intégrer le système (2), ce qui prouve que les caractéristiques
 des surfaces orthogonales sont les trajectoires orthogonales
 de la famille de surfaces (1.)

Signification géométrique de l'équation aux dérivées partielles.

Considérons l'éq.
$$Pp + Qq = R \quad (1)$$

Soit (x, y, z) un point M de l'espace; S une surface intégrale
 passant par ce point. L'équation du plan tangent à la surface S
 au point M est:
$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

L'éq. (1) montre que si l'on considère la droite D qui a pour
 équations:
$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{Z - z}{R}$$

Cette droite est située dans le plan tangent à la surface en M.

Or, en chaque point M de l'espace, P, Q, R prennent des
 valeurs bien déterminées. Par suite le problème de l'intégration
 revient au suivant:

A chaque point M de l'espace on fait correspondre une droite D passant par ce point (ses ~~paramètres~~ ^{paramètres} directeurs étant P, Q, R). On demande ~~quelles sont~~ ^{de trouver} les surfaces telles qu'en chacun de leurs points elles soient tangentes à la droite D correspondante.

On voit que si l'on considère l'ensemble des surfaces S qui passent par un point M de l'espace, tous leurs plans tangents en ce point passent par la droite D correspondante. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour qu'une infinité de surfaces soient les intégrales de l'éq. (1), est que l'enveloppe des plans tangents aux surfaces qui passent par un point quelconque de l'espace soit une droite (passant par ce point.)

On peut donc savoir d'avance, par cette considération géométrique, si l'équation aux dérivées partielles d'une famille de surfaces sera linéaire ou non. L'enveloppe des plans tangents en M peut se composer de n droites; alors l'équation aux dérivées partielles des surfaces sera le produit de n équations linéaires.

Les caractéristiques sont les courbes tracées sur les surfaces intégrales, telles qu'en chacun de leurs points elles soient tangentes à la droite D correspondante. Donc, si l'on peut trouver géométriquement une infinité de courbes dépendant de 2 paramètres et tangentes en chacun de leurs points à la droite D correspondante, on aura les caractéristiques, et le problème d'intégration sera résolu sans calcul.



